COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS — F. T. D.

TRIGONOMETRIA

PLANA E ESFÉRICA

Para o Ciclo Colegial e Admisão às Escolas Superiores

POR

IRMÃO ISIDORO PEDRO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITORA PAULO DE AZEVEDO LTDA.

RIO DE JANEIRO	SÃO PAULO	BELO HORIZONTE
Rua do Ouvidor, 166	Rua Líbero Badaró, 292	Rua Rio de Janeiro 655

PREÇO: Cr$ 40,00

COLECÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS — F. T. D.

- 1994 -

TRIGONOMETRIA

PLANA E ESFÉRICA

Para o Ciclo Colegial e Admisão às Escolas Superiores

POR

IRMÃO ISIDORO PEDRO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

EDITORA PAULO DE AZEVEDO LTDA.

RIO DE JANEIRO	SÃO PAULO	BELO HORIZONTE
Rua do Ouvidor, 166	Rua Líbero Badaró, 292	Rua Rio de Janeiro, 655

IMPRIMA-SE.

São Paulo, 3 de Novembro de 1946.

Mons. José Monteiro.
Vigário Geral.

PROGRAMA DE TRIGONOMETRIA DO 2.° ANO COLEGIAL

UNIDADE VI. — Vector: 1. Grandezas escalares e vectoriais. 2. Noção de vector; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vectores. 4. Vectores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

UNIDADE VII. — Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vector sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vector.

UNIDADE VIII. — Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

UNIDADE IX. — Transformações trigonométricas: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3. Uso das tábuas trigonométricas.

UNIDADE X. — Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.

UNIDADE XI. — Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos. 3. Resolução de triângulos obliquângulos. 4. Aplicações imediatas à topografia.

OBSERVAÇÃO

Embora não conste do programa de Matemática, recomenda-se aos Snrs. Professores que ministrem aos alunos do **1.° Ano Colegial** as noções relativas à *resolução dos triângulos mediante as razões trigonométricas*, como vêm apresentadas na 1.ª Parte dêste livro.

O aluno ficará assim habilitado para o estudo da *estática, óptica geométrica*, etc., constantes do programa de **Física** do 1.° Ano Colegial.

TRIGONOMETRIA

PRIMEIRA PARTE

Razões trigonométricas do ângulo agudo

UNIDADE I

DEFINIÇÕES PRELIMINARES — MEDIDAS DO ÂNGULO

1. — Definição. — ***Trigonometria*** é a parte da Matemática que tem por fim a resolução completa dos ***triângulos.*** É, portanto, um complemento à geometria do triângulo.

Resolver um triângulo é determinar os seus elementos desconhecidos por meio dos elementos dados ou conhecidos.

Um triângulo tem 6 elementos principais: 3 lados, a, b, c (fig. 1) e 3 ângulos A, B, C. Conhecidos 3 desses elementos, sendo pelo menos um deles lado, poderemos achar os outros 3.

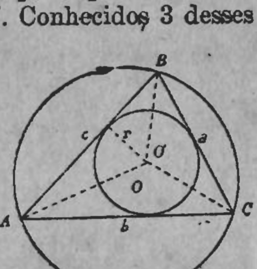

FIG. 1.

Para se fazer essa determinação, dois modos se apresentam: o método ***gráfico*** e o ***cálculo algébrico.***

O processo ***gráfico*** consiste em desenhar o triângulo com auxílio dos elementos dados. Dimensionam-se os lados de acordo com uma ***escala*** adotada. Os ângulos são medidos com o ***transferidor.***

O método *algébrico* ou *trigonométrico*, consiste em relacionar os elementos conhecidos e os incógnitos *por meio de fórmulas* que permitem determinar os elementos desconhecidos.

Êste último método é geralmente preferível ao primeiro, porque permite obter respostas muito mais aproximadas e sem o auxílio da representação geométrica.

2. — Divisões da Trigonometria. — Um triângulo pode ser traçado num plano ou numa superfície qualquer.

A *trigonometria plana* estuda os triângulos traçados sobre superfícies planas. Esses triângulos têm lados retos e ângulos planos.

A *trigonometria esférica* tem por objeto o estudo dos triângulos traçados na superfície de uma *esfera*.

Os *triângulos esféricos* têm como lados arcos de círculo; não têm ângulos planos e as suas propriedades diferem daquelas dos triângulos planos.

3. — Plano de estudo. — O estudo das razões trigonométricas no *triângulo retângulo* será feito logo de início. Isto nos permitirá fornecer ao estudante interessantes aplicações de medição indireta. Este estudo elementar é de particular interesse para os alunos que precisam de um pouco de trigonometria para a resolução dos problemas de *física* e de *cosmografia*.

Faremos, depois, na 2.ª Parte, um estudo mais completo das identidades, equações e transformações trigonométricas que habilitarão o aluno para a resolução completa dos triângulos.

A terceira parte do livro, será dedicada ao estudo do *triângulo esférico* com algumas aplicações geodésicas e astronômicas.

4. — Ângulo. — Seja a figura geométrica formada pelas semi-retas OM e ON traçadas por um ponto O; essa figura representa um ***ângulo***. O ponto O é o ***vértice*** do ângulo e as semi-retas OM e ON são os ***lados*** do ângulo. (fig. 2.)

Designa-se o ângulo pelo símbolo $\widehat{MON}$ ou ainda, simplesmente, pela letra O, do vértice, precedida da palavra ângulo ou do símbolo $\angle$. Também é frequente o emprego de uma só letra minúscula, colocada na abertura do ângulo: ângulo α.

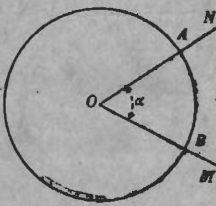

FIG. 2.

Tracemos um círculo de centro O e sejam A e B as suas intersecções com as semi-retas OM e ON. O menor dos arcos formados caracteriza a ***abertura*** do ângulo e serve para medi-lo.

Se o ponto B se deslocar sobre o círculo, o arco $\widehat{AB}$ da abertura crescerá e o ângulo correspondente também. Se o arco $\widehat{AB}$ for menor do que um quarto de círculo, o ângulo será ***agudo***; se o arco for maior do que um quarto de círculo, o ângulo correspondente será ***obtuso***.

Não consideraremos, por enquanto, ângulos em que o arco for maior do que meio círculo.

O ângulo $\widehat{MON}$ é um ***ângulo central***, em relação ao círculo O, cujo centro coincide com o vértice do ângulo.

5. — Medidas dos arcos e dos ângulos. — O ângulo central $\widehat{AOH}$, fig. 2, tem por medida o arco AB compreendido entre os seus lados. (Geom.).

As unidades adotadas na medição de um arco, e, portanto, do ângulo central correspondente, são o ***grau***, o ***grado*** e o ***radiano***.

Grau. — Se traçarmos dois diâmetros perpendiculares, teremos dividido o círculo em quatro partes iguais ou ***quadrantes;*** teremos formado 4 ***ângulos retos*** (fig. 3).

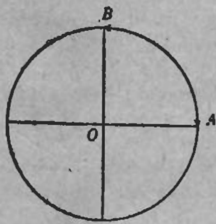

FIG. 3.

Grau é o arco correspondente a $\frac{1}{90}$ de um quadrante ou ainda ***é o ângulo equivalente a*** $\frac{1}{90}$ ***de um ângulo reto;*** designa-se pelo símbolo 1°.

O círculo terá, portanto, $90 \times 4 = 360$ graus ou 360°.

O grau subdivide-se em 60 ***minutos de arco*** (notação $60'$) e cada minuto de arco em 60 ***segundos de arco*** (notação $60''$). O círculo tem, pois:

$$360 \times 60 \times 60 = 1\,296\,000''.$$

O ***segundo*** admite submúltiplos que se designam por ***décimos, centésimos*** e ***milésimos*** de segundo.

A conversão de graus em minutos e segundos ou recìprocamente efetua-se por meio de operações elementares descritas nos livros de aritmética. Trata-se da conversão de ***números complexos*** que têm entre si uma relação ***sexagesimal.*** Esta dificuldade provocou a introdução de nova unidade que admitisse submúltiplos decimais: o ***grado.***

Grado. — ***Grado é o arco igual a*** $\frac{1}{100}$ de quadrante ou ainda ***o ângulo igual a*** $\frac{1}{100}$ ***de ângulo reto.***

O círculo tem, pois, 400 grados.

Admitem-se os submúltiplos do grado: ***decigrado, centigrado, miligrado.*** Assim, o arco de 45, 298 g, corresponde a 45 grados e 298 miligrados.

Radiano. — Em trigonometria medem-se todos os elementos de um círculo em função do raio do mesmo círculo. Assim, a unidade de arco, num círculo dado, é o arco de comprimento equivalente ao raio do mesmo círculo: é o ***radiano*** (rd).

Radiano é, pois, ***o ângulo central que subtende um arco de circunferência equivalente ao comprimento do raio do mesmo círculo.*** (Fig. 4).

Sabemos pela geometria que o círculo todo C é igual a 2π raios, ou 2π radianos.

Temos: $C = 2 \times 3{,}1416 = 2\pi$ radianos.

Um semi-círculo é igual a π radianos; um quadrante, $\frac{\pi}{2}$ radianos; 45° equivalem a $\frac{\pi}{4}$ radianos; e assim por diante.

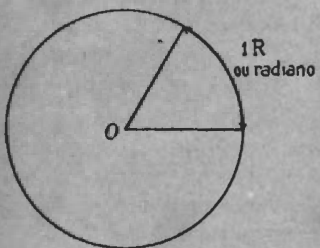

FIG. 4.

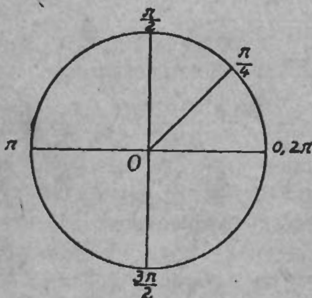

FIG. 5.

6. — Comparação das unidades. — Um círculo completo corresponde a 360°, ou a 400 grados, ou ainda a 2π radianos.

Podemos, pois, escrever a seguinte equivalência:

$$360° = 400^g = 2\pi R;$$

$$180° = 200^g = \pi R.$$

Designando-se por x, y, z, a medida de certo arco em graus, grados e radianos, respectivamente, teremos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{180}=\frac{y}{200}=\frac{z}{\pi}. \qquad (1)$$

Por meio desta proporção podemos exprimir um arco dado em função de uma qualquer das três unidades. Assim teremos, para graus e radianos:

$$\textbf{1 grau} = \frac{2\pi}{360}\text{ rd} = \frac{\pi}{180}\text{ rd} = 0{,}017\,453 \textbf{ radiano};$$

$$1 \textbf{ radiano} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = (57{,}2958)^\circ = 57^\circ17'44'',8.$$

Regras. — *a*) ***Para converter graus em radianos, multiplicar o número de graus por*** $\frac{\pi}{180}$.

b) ***Para converter radianos em graus, multiplicar o número de radianos por*** $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Exercícios. I. — ***Converter em graus o arco de 1 radiano.***

Pela equivalência (1) sabemos que π radianos correspondem a 180°; logo:

$$\textit{1 radiano} = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}1416} = 57^\circ17'44'',8.$$

II. — ***Calcular em grados o arco de*** 7°20′50″,2.

Seja y o valor em grados deste arco. Devemos ter:

$$\frac{y}{7^\circ20'50'',2} = \frac{200}{180};$$

ou, reduzindo os denominadores a segundos:

$$\frac{y}{26\,450{,}2} = \frac{200}{648\,000};$$

donde:

$$y = \frac{200 \times 26\,450{,}2}{648\,000} = \mathbf{8{,}164\ grados.}$$

ou 8 grados 164 miligrados, aproximadamente.

III. — ***Calcular em graus o valor do arco*** $\frac{\pi}{15}$.

Designando por x o arco equivalente em graus, teremos:

$$\frac{x}{\frac{\pi}{15}} = \frac{180}{\pi};$$

ou

$$15\,x = 180;$$

donde

$$x = \frac{180}{15} = \mathbf{12^\circ}.$$

IV. — ***Qual é em radianos o valor do arco de*** 450°?

Designando por z o equivalente em radianos deste arco, temos:

$$\frac{z}{\pi} = \frac{450}{180};$$

donde:

$$z = \frac{\pi \times 450}{180} = \frac{5\,\pi}{2}\ \textbf{radianos}.$$

V. — ***Dois móveis partem do mesmo ponto*** A ***de um círculo e percorrem-no em sentidos contrários com as velocidades respectivas de*** 3°/seg e 6°/seg. Calcular:

1.° ***Quanto tempo decorrerá entre cada encontro?***

2.° ***Em que pontos do círculo se darão os primeiros dois encontros?***

1.° Seja t o tempo que decorre entre o momento da saída e o primeiro encontro. Neste tempo, o primeiro móvel terá percorrido certo número de graus igual a: $3^\circ \times t$; e o segundo móvel, $6^\circ \times t$. O total dos graus percorridos será, então, de 360° e temos:

$$3\,t + 6\,t = 360;$$

donde

$$t = \frac{360}{9} = \mathbf{40\ seg.}$$

Os encontros sucessivos se darão, pois, evidentemente em cada 40 seg.

2.° Em 40 seg o primeiro móvel percorreu um arco de

$$3^o \times 40 = \mathbf{120^o}.$$

O segundo encontro se dará depois de um percurso de mais 120°, ou **240°** a partir do ponto de saída.

8. — Milésimo. — É uma unidade prática que serve para a avaliação rápida e aproximada dos ângulos e das distâncias. Define-se como sendo:

um ângulo central que subtende um arco igual a $\frac{1}{6\,400}$ ***do círculo.***

Desde que o círculo tem 2π radianos, o arco equivalente a 1 ***milésimo*** será, em ***radianos:***

$$1 \text{ mil} = \frac{2\pi}{6\,400} = 0{,}000\,98 \text{ rd};$$

ou, aproximadamente, teremos:

$$1 \textit{ milésimo} = 0{,}000\,1 \text{ rd}.$$

ou: um arco de 1 ***milésimo*** é aproximadamente igual a $\frac{1}{1\,000}$ do raio; daí o nome de ***milésimo*** que essa unidade recebeu.

A corda que subtende um arco muito pequeno pode ser considerada aproximadamente igual ao arco. Se um observador estiver no centro do círculo verá, pois, sob um ângulo de 1 milésimo uma corda igual à milésima parte do raio. Portanto: um milímetro a 1 metro de distância, ou 1 metro a 1 km de distância, etc., subtendem um arco de 1 milésimo.

Para a conversão de graus em milésimos (mil), ou vice-versa, podemos utilizar as seguintes relações:

$$1^o = \left(\frac{6\,400}{360}\right) \text{mil} = \left(\frac{160}{9}\right) \text{mil} = 17{,}8 \text{ mil}.$$

$$1 \text{ mil} = \left(\frac{360}{6\,400}\right)^o = \left(0{,}056\right)^o = (3{,}36)'.$$

Exemplos. I. — ***Exprimir em minutos um ângulo de*** 20 ***milésimos.***

$$20 \text{ mil} = (3{,}36)' \times 20 = \mathbf{(67{,}2)'}.$$

II. — ***Converter a milésimos um arco de*** 2°20'.

$$2°20' = \left(2\frac{20}{60}\right)^{\circ} = (2{,}33)^{\circ} = (17{,}8 \times 2{,}33) \text{ mil} = \mathbf{41{,}5\ mil.}$$

III. — ***Um alvo inimigo, visto perpendicularmente ao seu comprimento, subtende um ângulo de*** 30 ***milésimos. Calcular esse comprimento, sabendo que distância do alvo foi avaliada em*** 2 500 ***metros.***

Temos: $$\frac{2\,500}{1\,000} \times 30 = \mathbf{75\ metros.}$$

Nota. — Este método de avaliação é utilizado nos casos em que se deseja apenas uma medição ***rápida*** e ***aproximada***. Além disso, desde que se baseia na equivalência aproximada entre o arco e a corda correspondente, é evidente que não pode ser utilizado com bastante precisão senão para arcos inferiores a 5°, ou perto de 100 milésimos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. — Qual é em radianos o valor dos seguintes arcos: 30°, 120°, 12°30'?

2. — Qual é em grados, o valor do arco: 145°27'32"?

3. — Exprimir em graus o arco: 15,2015 grados.

4. — Exprimir em fração decimal de quadrante o arco: 12°22'.

5. — Calcular em metros o comprimento dos arcos:

$$15°20'30'' \ , \quad (20{,}7\,215)^{g} \ , \quad \frac{2\pi}{5} \text{ rd},$$

num círculo de 1 metro de raio.

6. — Qual é, em radianos, o arco percorrido pelo ponteiro dos minutos de um relógio, num período de 25 minutos? Neste mesmo tempo qual é o arco percorrido pelo ponteiro das horas? RESPOSTAS: **2,618 rd.** e **0,218 rd.**

7. — Um ponto do plano de uma roda descreve um arco de 2,5 radianos em um décimo de segundo. Quantas voltas dá essa roda por segundo? R.: **3,98 voltas/seg.**

UNIDADE II

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DO ÂNGULO AGUDO

9. — Medições diretas e indiretas. — Seja avaliar, à noite, a altura das nuvens (ou *teto*) acima de um campo de aviação.

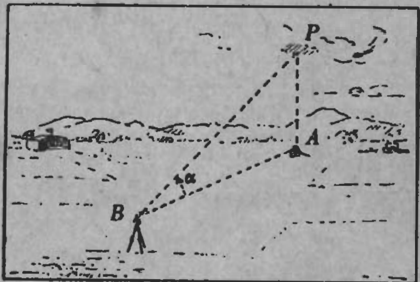

FIG. 6.

Um holofote situado em A, sobre o campo, emite um raio luminoso vertical AP que produz sobre as nuvens a mancha luminosa P.

Um observador situado em B, mede o ângulo de elevação, α, do ponto P acima da horizontal BA.

Sendo conhecida a distância BA, a altura da nuvem será logo determinada pelo cálculo trigonométrico.

A distância AB e o ângulo α, são obtidos por meio de ***medições diretas.***

A altura AP, obtida pelo cálculo, constitui uma **medição indireta.**

A trigonometria estabelece as fórmulas que permitem calcular os elementos de um triângulo, em função de alguns elementos, obtidos por um processo de medição direta.

10. — Razão dos lados de um triângulo retângulo. — Sejam as semi-retas AM e AN que fazem no ponto de intersecção A o ângulo α. Abaixemos, do lado AN, as perpendiculares C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3, sobre o lado AM. Os triângulos retângulos obtidos $A\,B_1\,C_1$, AB_2C_2, AB_3C_3, são semelhantes por terem o ângulo α comum. Os seus lados homólogos são, pois, proporcionais, e podemos escrever as seguintes proporções:

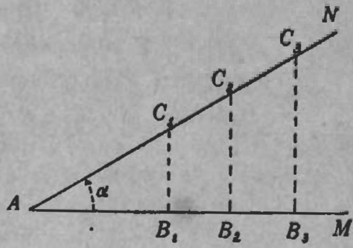

FIG. 7.

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C^2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \ldots = k \;;$$

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \ldots = k' \;;$$

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \ldots = k''.$$

Os coeficientes de proporcionalidade k, entre os catetos dos diversos triângulos retângulos obtidos ***dependem do ângulo*** α. O mesmo acontece para os coeficientes de proporcionalidade k' e k'' entre a hipotenusa e um dos catetos de cada um dos triângulos retângulo semelhantes.

Exemplos. — Para um triângulo em que $\alpha = 30°$, por exemplo, teremos:

$$k = \frac{B_1C_1}{AB_1} = 0{,}577 \,;\; k' = \frac{A\,B_1}{A\,C_1} = 0{,}866 \,;\; k'' = \frac{B_1C_1}{AC_1} = 0{,}5.$$

Estes três números são independentes do comprimento dos lados; variam apenas com o ângulo α e tomam um valor diferente e bem determinado quando α varia de 0° até 90°. Diz-se que são *funções do ângulo* α.

Aplicação. — No exemplo dado no número 8, suponhamos que o ângulo medido α seja de 30° e que a distância horizontal do holofote ao pé do observador em *B* seja de 1 000 metros. Teremos, para um ângulo de 30°, a razão:

$$k = \frac{AP}{BA} = 0{,}577\,;$$

ou

$$\frac{AB}{1\,000} = 0{,}577\,;$$

donde:

$$AP = 577 \text{ metros.}$$

A altura do teto de nuvens é, pois, de 577 m.

11. — **Razões trigonométricas.** — As razões possíveis entre os 3 lados de um triângulo retângulo de lados *a*, *b* e *c*, são em número de seis e foram chamadas respectivamente: **seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante** e **co-secante.**

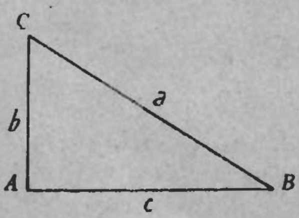

FIG. 8.

Seja o triângulo retângulo de lados *a*, *b* e *c* e de ângulos *A*, *B* e *C*, sendo $A = 90°$. Teremos as seis razões referentes ao ângulo *B* e variáveis com êle:

$\dfrac{b}{a}$ é o ***seno*** de *B* e escreve-se **sen B;**

$\dfrac{c}{a}$ é o ***co-seno*** de *B* e escreve-se **cos B;**

$\dfrac{b}{c}$ é a ***tangente*** de B e escreve-se **tg B;**

$\dfrac{c}{b}$ é a ***co-tangente*** de B e escreve-se **cotg B.**

$\dfrac{a}{c}$ é a ***secante*** de B e escreve-se **sec B;**

$\dfrac{a}{b}$ é a ***co-secante*** de B e escreve-se **cosec B.**

No triângulo *ABC*, figura 9, o lado *b* é o ***cateto oposto*** ao ângulo *B*; c é o ***cateto adjacente*** ao ângulo *B*. Poderemos então definir as primeiras quatro razões trigonométricas do ângulo *B* como sendo respectivamente:

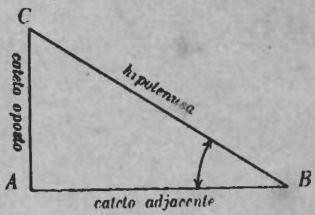

FIG 9.

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}; \text{ tg } B = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}};$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}; \text{ cotg } B = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}};$$

E diremos:

o seno do ângulo B ***é a razão do cateto oposto a este ângulo para a hipotenusa.*** E assim por diante para as outras razões.

Nota. — Se considerássemos o ângulo *C*, teríamos:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}; \ \cos C = \frac{b}{a};$$

$$\text{tg } C = \frac{c}{b}; \ \text{cotg } C = \frac{b}{c}.$$

12. — Funções trigonométricas. — As seis razões trigonométricas variam conforme o ângulo a que se referem. São perfeitamente determinadas para cada um dos ângulos compreendidos entre 0° e 90° e a cada ângulo, neste intervalo, corresponde apenas um valor para cada razão. As razões trigonométricas são, pois, ***funções*** dos ângulos a que se referem e costumam-se chamar ***funções trigonométricas.*** Essas funções são ***contínuas*** e ***definidas*** dentro do intervalo de 0° até 90°.

13. — Aplicações. — 1. — ***Calcular as seis funções trigonométricas dos ângulos agudos B e C de um triângulo retângulo, valendo-se dos seguintes dados:***

1.° $a=2;\ c=3.$	3.° $a=\sqrt{5};\ b=2.$
2.° $b=2;\ c=5.$	4.° $a=\sqrt{m^2+n^2};\ b=m.$

Sugestões. — Construir um triângulo retângulo qualquer e assinalar com as devidas letras os vértices e os lados. Calcular o lado que falta aplicando o teorema de Pythágoras.

2. — ***Um avião levanta voo em*** B ***e sobe fazendo um ângulo constante de*** 15° ***com a horizontal. A que altura estará quando passar, 1 minuto após a saída, pela vertical da torre de uma igreja situada a*** 2 km ***do ponto de partida?*** (sen 15° = = 0,26; cos 15° = 0,96; tg 15° = 0,27).

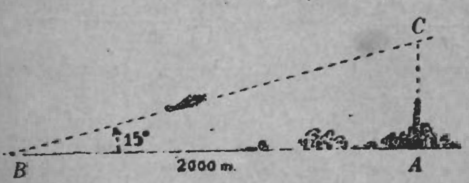

Fig. 10.

Calcular também a velocidade de ascenção e a velocidade própria do avião.

Respostas: altura = 540 metros; vel. de ascenção = 9 m/seg; velocidade própria = 125 km/h.

3. — ***Verificar a seguinte identidade:***

$$\text{sen}^2 B + \cos^2 B = 1 \text{ (1)}.$$

(1) A expressão sen²B lê-se *"seno ao quadrado de B"* e representa o quadrado de sen B ou (sen B)².

Com efeito, no triângulo retângulo (fig. 8) podemos escrever:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a}; \quad (\text{sen } B)^2 = \text{sen}^2 B = \frac{b^2}{a^2}; \qquad (1)$$

$$\cos B = \frac{c}{a}; \quad (\cos B)^2 = \cos^2 B = \frac{c^2}{a^2}. \qquad (2)$$

Somando-se membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos:

$$\text{sen}^2 B + \cos^2 B = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

14. — Reciprocidade das funções trigonométricas. — Obtém-se o ***recíproco*** de um número dividindo-se a unidade por esse número; assim, o recíproco de m é $\frac{1}{m}$; o recíproco de $\frac{a}{b}$ é $\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$.

O producto de dois números recíprocos é igual a 1. Assim, temos:

$$m \times \frac{1}{m} = 1 \quad ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

Um exame atento das razões trigonométricas estabelecidas no número 11 mostra que temos:

1.° $\text{sen } B = \frac{b}{a} = 1 \div \frac{a}{b}$; ou, $\text{sen } B = \frac{1}{\text{cosec} B}$.

2.° $\cos B = \frac{c}{a} = 1 \div \frac{a}{c}$; ou, $\cos B = \frac{1}{\sec B}$.

3.° $\text{tg } B = \frac{b}{c} = 1 \div \frac{c}{b}$; ou, $\text{tg } B = \frac{1}{\text{cotg } B}$.

Logo, temos:

1.° $\text{sen } B \times \text{cosec } B = 1.$
2.° $\cos B \times \sec B = 1.$
3.° $\text{tg } B \times \text{cotg } B = 1.$

Obtemos, pois, 3 pares de números recíprocos.

15. — Funções trigonométricas dos ângulos complementares. — Em todo triângulo retângulo, a soma dos ângulos agudos é igual a 90°; diz-se que esses ângulos são ***complementares.*** Temos, pois: $B + C = 90°$;

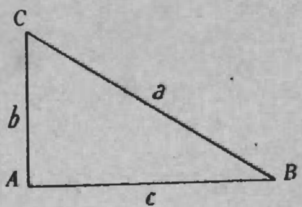

FIG. 11.

donde:

$$B = 90° - C \text{ e } C = 90° - B.$$

Por outro lado, examinando as razões trigonométricas estabelecidas no número 11 e na "***Nota***" do mesmo número, temos:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \cos C = \cos (90° - B);$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \text{sen } C = \text{sen } (90° - B);$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \text{cotg } C = \text{cotg } (90° - B).$$

Logo: ***o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo, são respectivamente o co-seno, o seno e a co-tangente do complemento desse ângulo.***

Nota. — As denominações ***co-seno, co-tangente*** e **co-secante,** significam precisamente:

co-seno = seno do complemento;
co-tangente = tangente do complemento;
co-secante = secante do complemento.

Exemplos. — De acordo com isto, teremos:

sen 45° = cos 45°.	sen 30° = cos 60°.
tg 45° = cotg 45°.	tg 30° = cotg 60°.
sec 45° = cosec 45°.	sec 30° = cosec 60°.

sen 0° = cos 90°.
tg 0° = cotg 90°.
sec 0° = cosec 90°.

16. — Determinação das funções trigonométricas. a) ***Processo gráfico.*** — Poderíamos calcular, sem grande precisão, as razões trigonométricas de um ângulo, construindo um triângulo retângulo que incluísse o ângulo dado. Medindo, depois os lados e fazendo as razões dos números acima obtidos por medição direta, obteríamos as razões trigonométricas do ângulo dado.

Assim, para um ângulo de 40°, teríamos a figura ao lado:

$$\text{sen } 40° = \frac{4{,}4}{6{,}6} = 0{,}6$$

$$\cos 40° = \frac{5{,}0}{6{,}6} = 0{,}7;$$

$$\text{tg } 40° = \frac{4{,}4}{5{,}0} = 0{,}8.$$

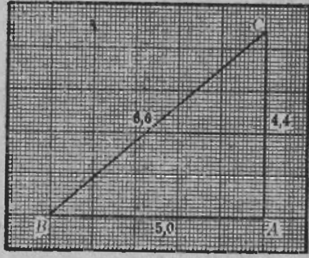

FIG. 12.

Para obter essas mesmas razões com aproximação maior seria necessário medir os lados com maior precisão; supondo-se, ainda, que o ângulo traçado é exatamente de 40°. Porém a deficiência dos instrumentos utilizados, régua, transferidor, lápis, não permitem que se obtenham essas razões com mais de uma ou duas decimais exatas. Recorre-se por isso a outros métodos, analíticos, que permitem calcular essas razões com o grau de aproximação que se desejar.

No fim do livro na página 400, veja-se uma tábua que dá essas razões com 4 decimais de aproximação.

17. — Disposição geral das tábuas dos valores das funções trigonométricas. — A disposição das tábuas dos valores das funções trigonométricas de 0° até 90°, baseia-se no seguinte princípio já estudado:

O seno e a tangente de um ângulo agudo são respectivamente iguais ao co-seno e à co-tangente do ângulo complementar.

A primeira coluna à esquerda dá os ângulos de grau em grau desde 0° até 45°; a segunda coluna dá esses mesmos arcos em radianos.

As quatro colunas seguintes dão respectivamente o seno, o co-seno, a tangente, a co-tangente do ângulo correspondente da 1.ª coluna.

A última e a penúltima colunas à direita dão os ângulos de 45° até 90° dispostos de tal modo que correspondam numa mesma linha horizontal com os ângulos ou arcos complementares da primeira e da segunda colunas à esquerda. Deste modo os arcos de 45° até 90° estão por ordem crescente de baixo para cima.

As funções trigonométricas destes arcos obedecem, agora, às indicações dadas na base das colunas.

Assim a coluna dos senos de 0° até 45° tornou-se coluna dos co-senos de 45° até 90°.

Exemplos de leitura direta. — Eis alguns exemplos:

$\text{sen } 39° = 0{,}6293;$	$\text{sen } 69° = 0{,}9336;$
$\cos 28° = 0{,}4695;$	$\cos 84° = 0{,}1045;$
$\text{tg } 15° = 0{,}2679.$	$\text{cotg } 50° = 0{,}8391.$

18. — Variações das funções trigonométricas. — Uma simples inspeção da tábua dos valores das funções trigonométricas dá uma idéia das variações dessas funções quando o arco varia de 0° até 90°.

Assim, verifica-se que o ***seno*** cresce com os arcos desde 0 até 1;

O ***co-seno*** decresce com os arcos desde 1 até 0.

A ***tangente*** cresce ao mesmo tempo que os arcos, porém muito mais ràpidamente do que o seno, e, nas vizinhanças de 90° toma valores muito grandes, acima de qualquer limite positivo; costuma-se representar o seu valor para o arco de 90° pelo símbolo ∞ (infinito).

A ***cotangente,*** que é muito grande nas proximidades de 0° decresce até 0 quando o arco tende para 90°; tem variação inversa da tangente.

19. — Observações. — 1. ***As variações das funções trigonométricas não são proporcionais às variações correspondentes dos arcos.*** Assim, tomemos por exemplo:

$$\text{sen } 10^\circ = 0{,}1736,$$
$$\text{sen } 30^\circ = 0{,}5000.$$

Verifica-se que o seno de 30° não é três vezes maior do que o seno de 10°. Uma verificação análoga poderia ser feita para as outras funções trigonométricas.

2. Os ***senos,*** tomados de grau em grau, variam mais depressa nas proximidades de 0° do que nas proximidades de 90°.

Assim, a diferença entre o seno de 0° e o seno de 1° é 0,0175, ao passo que a diferença entre o seno de 89° e o seno de 90° é 0,0002.

Do mesmo modo poderíamos verificar que o co-seno varia pouco na vizinhança de 0° e apresenta variação maior na vizinhança de 90°.

A tangente apresenta variações semelhantes às do seno nas vizinhanças de 0° e varia muito ràpidamente a partir de 80°; entre 89° e 90° passa de 57 ao infinito.

20. — Diferença tabular. — Chama-se ***diferença tabular*** a diferença entre dois valores consecutivos da tábua. Assim, a diferença tabular entre o seno de 20° e o seno de 21° é:

$$0{,}3584 - 0{,}3420 = 0{,}0164;$$

é o aumento do seno quando o arco passa de 20° a 21°.

Nota. — Quando a diferença entre os arcos não passa de 1°, e que os cálculos não exigem grande precisão, pode-se admitir que, no pequeno intervalo de arco considerado, as funções trigonométricas variam ***proporcionalmente ao arco.*** Esta observação serve de base para o cálculo das funções trigonométricas de ângulos compreendidos entre dois ângulos consecutivos da tábua; é uma operação de ***interpolação.***

21. — Exemplo de interpolação. — Calcular tg 42° 21′.

Temos pela tábua das funções trigonométricas:

$$\text{tg } 42^\circ = 0{,}9004$$
$$\text{tg } 43^\circ = 0{,}9325$$

Diferença tabular: $0{,}9325 - 0{,}9004 = 0{,}0321$.

Por 1° ou 60′, a tangente sofreu um aumento de 0,0321; por 1′ o aumento é $\frac{0{,}0321}{60}$ e por 21′ o aumento aproximado será:

$$\frac{0{,}0321 \times 21}{60} = 0{,}0113.$$

Acrescentando-se este aumento à tangente de 42° teremos:

$$\text{tg } 42°21' = 0{,}9116.$$

22. — Cálculo das funções trigonométricas de alguns arcos. — Podemos calcular fàcilmente, pela geometria, as funções trigonométricas de alguns arcos.

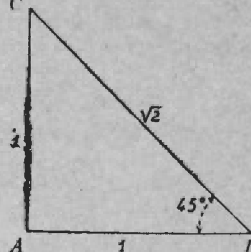

FIG. 13.

Arco de 45°. — No triângulo retângulo ABC, tomemos $AB = AC = 1$. Este triângulo retângulo é isóceles; portanto, os ângulos B e C são cada um de 45°. A hipotenusa é igual a $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

As funções trigonométricas do ângulo de 45° são, pois:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \text{tg } 45° = \frac{1}{1} = 1.$$

O complemento de 45° sendo também 45° temos (17):

$$\cos 45° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071\ldots; \ \text{cotg } 45° = \text{tg } 45° = 1.$$

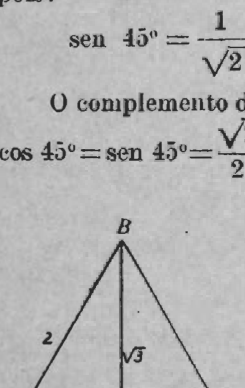

FIG. 14.

Arcos de 30° e 60°. — O triângulo HAB, formado ao traçar a altura de um triângulo equilátero de lado 2, tem por catetos 1 e $\sqrt{3}$ e por hipotenusa 2. Teremos, pois:

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660;$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}732.$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5;\ \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5774.$$

Para o ângulo de 30°, complemento de 60°, teremos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = 0{,}5;\ \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = 0{,}5774;$$
$$\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = 0{,}8660;\ \operatorname{cotg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = 1{,}7320.$$

23. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Calcular*** cos 26°32′.
Pela tábua dos valores naturais (página 400), temos:

$$\begin{array}{rl} \cos 26^\circ = & 0{,}8988 \\ \cos 27^\circ = & 0{,}8910 \\ \hline \text{dif. tabular} = & 78 \end{array} \qquad \frac{78 \times 32}{60} = 41$$

$$\cos 26^\circ 32' = 0{,}8988 - 41 = \mathbf{0{,}8947}$$

Notemos que o co-seno e a co-tangente diminuem quando o arco cresce.

II. — ***Sabendo que*** sen $B = 0{,}3035$, ***calcular o ângulo*** B.

Notemos que os senos crescem com os arcos e procuremos na tábua o arco cujo seno se aproxima mais, ***por falta,*** do seno dado; encontramos 17°. O ângulo B está compreendido entre 17° e 18°. Temos:

$$\begin{array}{rl} \operatorname{sen} 17^\circ = & 0{,}2924 \\ \operatorname{sen} 18^\circ = & 0{,}3090 \\ \hline \text{diferença tabular} = & 166 \end{array}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{array}{rl} \operatorname{sen} 17^\circ = & 0{,}2924 \\ \operatorname{sen} B = & 0{,}3035 \\ \hline \text{diferença} = & 111 \end{array}$$

Fazemos pois, o seguinte raciocínio: Se por uma diferença de 166 o arco aumenta de 60′, por 1 unidade o aumento será 166 vêzes menor e por 111 unidades o aumento será:

$$\frac{60' \times 111}{166} = 40'.$$

Logo, o arco pedido é **17°40′.**

III. — *Calcular o arco* C, *sabendo que* cotg $C = 0{,}4176$.

Notemos, em primeiro lugar, que as cotagentes decrescem quando o arco cresce. Procuremos o arco cuja cotangente se aproxima mais, ***por excesso***, da cotangente dada; temos:

$$\begin{array}{rl} \text{cotg } 67^\circ = & 0{,}4245 \\ \text{cotg } 68^\circ = & 0{,}4040 \\ \hline \text{dif. tabular} = & 205 \end{array}$$

O arco dado está compreendido entre 67° e 68°. Temos, também:

$$\begin{array}{rl} \text{cotg } 67^\circ = & 0{,}4245 \\ \text{cotg } C = & 0{,}4176 \\ \hline \text{diferença} = & 69 \end{array}$$

Por uma diminuição de 205 décimos milésimos na cotangente, o arco passa de 67° a 68°; aumenta de 60'; por uma diminuição de 1 décimo milésimo, aumentaria de $\frac{60'}{205}$;
e, por uma diminuição de 69 décimos milésimos, o arco sofrerá um aumento de:

$$\frac{60' \times 69}{205} = 21'.$$

O arco pedido é, pois:

$$C = 67^\circ 21'.$$

24. — Problema. — ***Calcular, pela trigonometria, o perímetro de um pentágono regular inscrito num círculo de* 2 m *de raio.***

Seja $AB = 2a$ o lado do pentágono regular e OH o apótema. O ângulo central AOB é igual a $\frac{360}{5} = 72°$.

O ângulo AOH vale, pois, 36°.

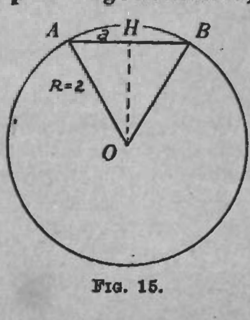

Fig. 15.

No triângulo retângulo AOH, podemos escrever

$$\text{sen } 36° = \frac{a}{2};$$

donde $$a = 2 \text{ sen } 36°$$

e $$AB = 4 \text{ sen } 36°.$$

O perímetro do pentágono é igual a:

$$P = 5 \times 4 . \text{sen } 36° = 20 \times 0{,}5878 = \mathbf{11{,}756 \text{ m.}}$$

25. — Alguns ângulos de uso frequente. — *a)* Nos problemas de aplicação das funções trigonométricas alguns ângulos especiais são de uso corrente: ***ângulo de elevação, ângulo de depressão, ângulos de orientação geográfica.***

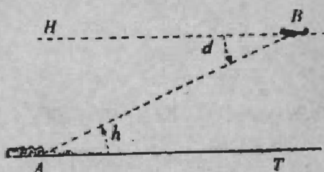

FIG. 16.

Seja o objeto B e o observador A. Diz-se que o objeto B está acima do horizonte de A, O ângulo $TAB = h$, medido num plano vertical, entre o horizonte AT e o raio visual AB é o ***ângulo de elevação*** de B visto de A, ou ***altura acima do horizonte.*** Esse ângulo pode variar desde o ***horizonte*** até o zenite, de 0° até 90°.

Seja, agora, o observador B e o objeto A. O objeto A está abaixo da horizontal, representado pela reta BH traçada por B. O ângulo HBA $= d$, medido num plano vertical desde a horizontal BH até o raio visual BA, é o ***ângulo de depressão*** do objeto A visto de B.

b). — **Orientação.** — Dado um observador em O, e vários objetos distribuídos sobre o plano horizontal, a posição desses pontos pode ser fixada em relação às direções geográficas dos pontos ***Norte*** (N), ***Sul*** (S), ***Leste*** (E) e ***Oeste*** (W).

Sejam as direções *NS* e *EW* que se cortam perpendicularmente no ponto *O*.

A posição do ponto *A*, no horizonte do observador pode ser indicada pela anotação N.57°E., isto é: direção Norte, 57° para Leste.

O ponto *B* terá como orientação: N.23°W.

O ponto *C* está na direção S.35°W.

O ponto *D* está orientado para S.43°E. em relação ao ponto *O*.

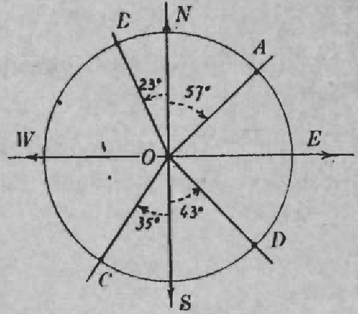

FIG. 17.

Indica-se, pois, em primeiro lugar se o ponto está para o N ou para o S da linha EW. Em seguida, de quantos graus para E ou para W da direção NS.

c). — **Azimute.** — Nas aplicações astronômicas, e geodésicas, os objetos são localizados no plano horizontal, em relação à direção Norte-Sul. Os ângulos são geralmente contados a partir do Sul magnético até o objeto, ***no sentido de rotação dos ponteiros de um relógio:*** (1) Sul → Oeste → Norte → Leste, desde 0° até 360°.

Os azimutes dos pontos cardeais são respectivamente: Norte (180°); Oeste (090°); Sul (000°); Leste (270°).

d). — **Rumos.** — Nas questões relativas à navegação marítima ou aérea, o ***rumo*** ou ponto do horizonte para o qual fica dirigido o eixo longitudinal da nave, é dado pela convenção seguinte:

Os ângulos de ***rumo*** são contados a partir do Norte magnético de 0° até 360° ***no sentido de rotação dos ponteiros do relógio.*** Na figura 17, as semi-retas traçadas

(1) Os azimutes são contados, às vezes, a partir do Norte no sentido N W S E, de 0.° até 360.°.

pelo ponto *O*, indicam os seguintes rumos em relação ao Norte:

ON (000°)	OD (137°)	OW (270°)
OA (057°)	OS (180°)	OB (337°)
OE (090°)	OC (215°)	NO (360°) ou (000°).

Faremos frequentemente uso desta convenção nos problemas de aplicação.

***e*). — Termos convencionais de frequente uso nos problemas de navegação.** — Damos aqui as definições, de uso mais corrente, dos termos de navegação. É sempre esse mesmo sentido que lhes daremos nos problemas de aplicação.

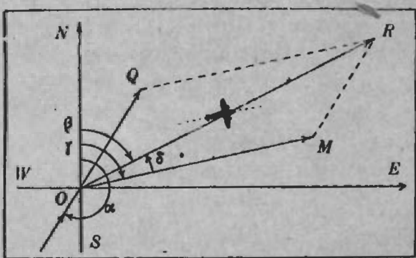

Fig. 18.

Rumo = direção do eixo longitudinal do aparelho; ponto do horizonte para o qual está dirigida a nau ou aeronave.
Na figura 18 é a direção *OM*, que faz $\gamma°$ com o Norte geográfico.

Rota = Direção do caminho seguido pelo aparelho. Num meio (ar ou água) parado, a direção da rota coincide com a direção do rumo.
Na figura 18 é a direção *OR*, ou movimento resultante.

Deriva = ângulo entre o rumo e a rota. Este ângulo está assinalado, na figura 18, com a letra δ (delta).

O vento sopra de um ponto do horizonte situado entre *S* e *W*; a orientação desse ponto é dada pelo ângulo α.

O vector $\overrightarrow{OQ}$ indica a intensidade, sentido e direção do vento.

O vector $\overrightarrow{OM}$ indica a ***velocidade própria*** do aparelho quando a navegação se faz num meio parado.

O vector $\overrightarrow{OR}$ é a ***velocidade resultante*** do aparelho em relação ao solo. É a diagonal do paralelogramo construído sôbre os vectores $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{OQ}$.

Para chegar ao ponto R, o aparelho deve dirigir-se para um ponto do horizonte de orientação γ (***rumo***) em relação ao Norte. Pela ação do vento será desviado do caminho que seguiria nesse rumo e segue o caminho OR (***rota***). O desvio é o ângulo δ (***deriva***).

As velocidades das naves são geralmente dadas nas seguintes unidades:

metros por segundo = m/seg.
kilômetros por hora = km/h.
milhas por hora = mi/h. (milha náutica = 1 853 m.).
1 nó = 1 milha náutica por hora.

26. — Exercícios resolvidos. — Problema I. — ***Um avião passa na vertical de um ponto P situado a 2 000 do campo de pouso em A. Nesse mesmo instante o ângulo de depressão do ponto A é de 20°. Calcular a altura do avião.*** O ângulo PAB é também de 20°. Seja h a altura do avião; o triângulo retângulo PAB, dá:

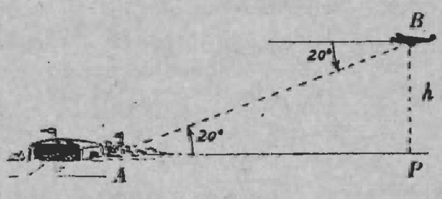

FIG. 19.

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{h}{2\,000};$$

donde: $h = 2\,000 \operatorname{tg} 20^\circ = 2\,000 \times 0{,}364 =$ **728 metros.**

Problema II.* — *C, é um navio situado a 10 milhas e exatamente a Leste do ponto A. O observador B está exatamente ao Sul de C e vê o ponto A na direção N.40°W. Calcular as distâncias de B para C. (Fig. 20).

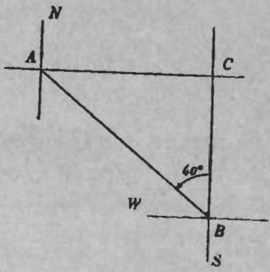

FIG. 20.

No triângulo retângulo ABC, temos:

1.° $CB = AC$ cotg $40° = 10 \times 1{,}1918$
$= \mathbf{11{,}918}$ **milhas.**

2.° Da relação:

$$AC = AB.\text{sen } 40°,$$

tiramos:

$$AB = \frac{AC}{\text{sen } 40°} = \frac{10}{0{,}6428} = \mathbf{15{,}5 \text{ milhas}}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS (1)

8. — Construir geomètricamente um ângulo de 60°;

1) por 3 pontos M, N, P escolhidos arbitràriamente sobre um dos lados do ângulo traçar perpendiculares ao outro lado;

2) medir, com aproximação de milímetro, os catetos e as hipotenusas dos três triângulos retângulos formados;

3) calcular apreximadamente as razões trigonométricas relativas ao ângulo de 60° e comparar os resultados com a tábua das funções trigonométricas;

4) verificar que estas razões são as mesmas para os três triângulos retângulos considerados.

9. — Sabendo-se que sen $B = \frac{4}{5}$, calcular as outras funções trigonométricas do ângulo B.

SUGESTÃO. — Considerar um triângulo retângulo de hipotenusa 5 e cateto 4 oposto ao ângulo A. Calcular o outro cateto.

10. — Verificar as identidades seguintes:

1) $\sec^2 B = 1 + \text{tg}^2 B$.

2) $\text{tg } B = \dfrac{1}{\text{cotg } B}$.

Veja-se o número 13, exercício 3.

(1) No *Apêndice*, pág. 361, damos instruções para o uso da *régua logarítmica* ou *de cálculo*. Seria muito útil aprender desde logo o seu manejo e aplicá-la nas *operações* dos problemas e na determinação dos *senos* e *tangentes* dos arcos.

11. — Sabendo que B é um ângulo agudo e que $\operatorname{tg} B = \frac{3}{2}$; calcular as funções trigonométricas do ângulo complementar (90º-B).

SUGESTÃO. — Considere-se um triângulo retângulo de catetos 3 e 2, sendo que 3 é oposto ao ângulo B.

12. — Com auxílio da tábua das funções trigonométricas, calcular:

1) sen 15º35′ .	4) cotg 52º05′ .
2) sen 75º22′ .	5) tg 80º10′ .
3) tg 22º53′ .	6) sec 20º15′ .

13. — Calcular, com aproximação de 1′, os ângulos correspondentes às funções trigonométricas seguintes:

1) sen $B = 0{,}0843$	5) cos $B = 0{,}3173$
2) sen $C = 0{,}9580$	6) cos $C = 0{,}5640$
3) tg $B = 0{,}1465$	7) cotg $B = 2{,}9042$
3) tg $C = 1{,}4106$	ẽ) cotg $C = 0{,}7133$

14. — Qual é o ângulo de elevação do sol acima do horizonte, quando uma haste vertical de 1,5 m projeta uma sombra horizontal de 2 m?

15. — Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que um dos seus ângulos é de 20º e o lado adjacente mede 3 m.

UNIDADE III

RESOLUÇÃO DOS TRIÂNGULOS

27. — Fórmulas de resolução. — Consideramos até o presente as razões trigonométricas e delas deduzimos com facilidade os elementos incógnitos dos problemas resolvidos. Vamos agora estabelecer as fórmulas que nos dão imediatamente os elementos incógnitos em função dos elementos conhecidos.

Um triângulo tem 6 elementos principais: 3 lados e 3 ângulos. Geralmente designam-se os ângulos pelas letras maiúsculas A, B e C e os lados opostos pelas minúsculas a, b e c. Nos triângulos retângulos, A representa o ângulo reto e a a hipotenusa.

Um triângulo é determinado quando se conhecem 3 elementos, figurando entre eles pelo menos 1 lado.

Os dois teoremas seguintes servem para a resolução de todos os triângulos retângulos.

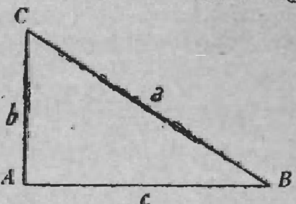

FIG. 21.

28. — Teorema. — ***Num triângulo retângulo, um cateto é igual à hipotenusa multiplicada pelo seno do ângulo oposto a êste cateto ou pelo co-seno do ângulo adjacente.***

Seja o triângulo retângulo ABC; a definição do seno dá (n.º 11).

$$\operatorname{sen} C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}; \qquad \text{donde: } c = a \operatorname{sen} C;$$

e
$$\cos C = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a}; \qquad \text{donde: } b = a \cos C.$$

Como os ângulos B e C são complementares, temos ainda:

$$c = a \cos B \quad \text{e} \quad b = a \operatorname{sen} B.$$

Logo, temos as fórmulas seguintes, que nos dão cada um dos catetos em função da hipotenusa:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{b = a \cos C = a \operatorname{sen} B} \\ \boldsymbol{c = a \cos B = a \operatorname{sen} C} \end{aligned}} \qquad (1)$$

29. — Teorema. — ***Num triângulo retângulo, um cateto é igual ao outro cateto multiplicado pela tangente do ângulo oposto ao cateto procurado ou pela cotangente do ângulo adjacente.***

Seja o trângulo retângulo ABC (fig. 21); a definição da tangente (n.º 11) dá:

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}; \qquad \text{donde:} \quad c = b \operatorname{tg} C.$$

Como os ângulos B e C são complementares, essa fórmula pode ainda escrever-se (n.º 15):

$$c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B.$$

Com o ângulo B, teríamos também:

$$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C.$$

E temos as fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B} \\ \boldsymbol{b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C} \end{aligned}} \qquad (2)$$

30. — Teorema de Pitágoras. — ***Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.***

Esta propriedade notável é demonstrada em geometria (Geom. F. T. D. c/sup. n.º 413). Eis como se verifica também pela trigonometria.

Temos (n.º 28):

$$c = a \operatorname{sen} C \quad \text{e} \quad b = a \cos C;$$

elevando-se estas igualdades ao quadrado, tem-se:

$$c^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 C \quad \text{e} \quad b^2 = a^2 \cos^2 C;$$

somando-se membro a membro, vem:

$$b^2 + c^2 = a^2 (\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C).$$

A expressão dentro de parênteses é igual a 1 conforme foi demonstrado (n.º 13, 3.º); logo, temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad (3)$$

As fórmulas (1), (2) e (3) servem para resolver qualquer triângulo retângulo.

31. — Casos principais — Há 4 casos clássicos na resolução dos triângulos retângulos.

1.º Dados: a hipotenusa e um ângulo agudo (a e B);

2.º Dados: um cateto e um ângulo agudo (b e B);

3.º Dados: os dois catetos (b e c);

4.º Dados: a hipotenusa e um cateto (a e b).

32. — 1.º Caso. — *Dados a e B, calcular C, b, c e S.*

Por ser complemento de B, $\quad C = 90^\circ - B$.

O teorema (**28**) dá os catetos:

$$b = a \operatorname{sen} B \quad \text{e} \quad c = a \cos B.$$

A área é igual a $\quad S = \frac{1}{2} bc.$

33. — 2.° Caso. — *Dados b e B, calcular C, a, c e S.*

Por ser complemento de B, $\quad C = 90^\circ - B$.

O teorema (**28**) dá: $\quad b = a \operatorname{sen} B$;

donde
$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

O teorema (**29**) dá: $\quad c = \dfrac{b}{\operatorname{tg} B} = b \operatorname{cotg} B.$

A área $S = \frac{1}{2}bc$ dá, pela substituição de c:

$$S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{cotg} B.$$

34. — 3.° Caso. — *Dados b e c, calcular B, C, a e S.*

As fórmulas (**2**) dão os ângulos agudos:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}.$$

A relação $a^2 = b^2 + c^2$ permite calcular a.

A área é: $\quad S = \dfrac{1}{2}bc.$

35. — 4.° Caso. — *Dados a e b, calcular B, C, c e S.*

As fórmulas (**1**) dão: $\operatorname{sen} B = \cos C = \dfrac{b}{a}.$

O lado c é dado pela fórmula: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

A área é: $\quad S = \dfrac{1}{2}bc = \dfrac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2}.$

36. — Triângulo qualquer. — Em vista das numerosas aplicações em que se consideram triângulos quaisquer, daremos aqui algumas indicações que permitem resolvê-los de modo elementar e aproximado. Mais tarde completaremos este estudo valendo-nos dos logarítmos e das fórmulas de transformação.

37. — Teorema. — ***Num triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.***

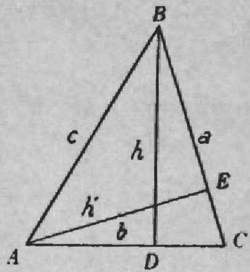
FIG. 22.

Seja o triângulo ABC, de alturas $BD = h$ e $AE = h'$ (fig. 22).

Nos triângulos retângulos ABD e CBD, temos:

$$h = c \text{ sen } A = a \text{ sen } C;$$

donde:

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A}. \qquad (1)$$

Por causa dos triângulos retângulos ABE e AEC formados pela altura AE, temos:

$$h' = b \text{ sen } C = c \text{ sen } B;$$

donde:

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B}. \qquad (2)$$

As igualdades (1) e (2) têm um membro igual; logo, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}} \qquad (4)$$

Esta é a ***relação dos senos***, à qual convém acrescentar a relação entre os ângulos de todo triângulo:

$$\boxed{A + B + C = 180°} \qquad (5)$$

38. — Teorema. — ***Num triângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros lados menos o duplo produto dêsses lados pelo co-seno do ângulo agudo que formam.***

Seja o triângulo ABC e o lado a oposto ao ângulo agudo A. Abaixemos a altura $CD = h$ relativa ao vértice C; cairá sobre AB ou sobre o prolongamento de AB. Em qualquer caso, teremos (Geom. c/sup. n.º 283):

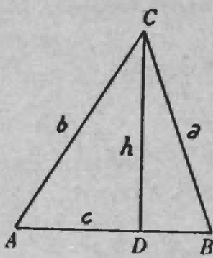

FIG. 23.

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2c \times AD.$$

Ora, o triângulo retângulo ACD dá:

$$AD = b \cos A;$$

logo:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.}$$

Para os três lados de um triângulo ***acutângulo*** teríamos do mesmo modo:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A;\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B;\\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2\,ab \cos C.\end{aligned}} \qquad (6)$$

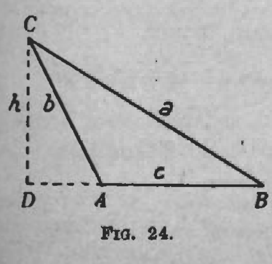

FIG. 24.

39. — Teorema. — ***Num triângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos dois outros lados mais o duplo produto desses lados pelo co-seno do suplemento do ângulo que formam.***

No triângulo ABC (fig. 24) podemos escrever (Geom. c/sup. n.° 283):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c \times DA.$$

Ora, no triângulo ADC, temos:

$$DA = b \cos (180^\circ - A).$$

Logo, temos:

$$\boldsymbol{a = b + c + 2\,bc \cos (180^\circ - A).}$$

Para os três ângulos do triângulo obtusângulo podemos escrever:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + 2\,bc \cos (180^\circ - A) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,bc \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C \end{aligned}} \qquad (7)$$

40. — Resolução do triângulo qualquer. — As fórmulas (4), (5), (6) e (7) devidamente aplicadas e transformadas permitem a resolução completa do triângulo qualquer. Por enquanto veremos apenas a sua aplicação em alguns casos simples em que não se exija grande precisão; tais são, por exemplo, numerosos ***exercícios de física*** relativos à composição de fôrças e de movimentos.

41. — Aplicações. — ***Problema I.* — *Um retângulo tem 5 m de comprimento e 2 m de largura. Que ângulo fazem as diagonais com os lados?*** Sejam m e n estes ângulos. Temos:

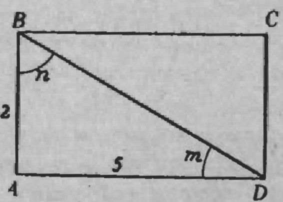

FIG. 25.

$$\text{tg}\ m = \frac{2}{5} = 0{,}4;$$

donde $m = 21°50'$.

Também, temos:

$$\text{tg}\ n = \frac{5}{2} = 2{,}5;$$

donde $n = 68°10'$, aproximadamente.

VERIFICAÇÃO. — A soma dos ângulos calculados deve ser igual a 90°, com aproximação de 1 ou 2 minutos de arco. Temos aqui:

$$21°50' + 68°10' = 90°.$$

NOTA. — Poderíamos ter calculado n baseando-nos na propriedade de serem m e n complementares. Porém, o processo indicado é melhor porque permite a verificação do resultado.

***Problema II.** — Uma torre está encimada por uma haste vertical. Um observador situado em M a 120 m da torre e no nível da base observa um ângulo de elevação de 28°30′ para o pé da haste e um ângulo de elevação de 30°20′ para a extremidade superior da mesma haste. Calcular a altura da torre e a altura da haste.*

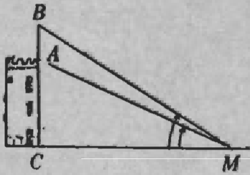

FIG. 26.

Seja BC (fig. 26) a altura medida desde o pé da casa até o alto da haste. O triângulo CBM dá:

$$BC = 120 \times \text{tg } 30°20' = 120 \times 0,5851 = 70,21 \text{ m}.$$

O triângulo CAM dá:

$$AC = 120 \times \text{tg } 28°30' = 120 \times 0,5430 = 65,16 \text{ m}.$$

A altura da haste é, pois:

$$AB = CB - CA = 70,21 - 65,16 = 5,05 \text{ m}.$$

Respostas: altura da casa **65,16 m.**
altura da haste **5,05 m.**

***Problema III.** — Um avião dirige-se para Leste com a velocidade própria de* 150 km/h. *O vento sopra ao mesmo tempo do Sul com a velocidade de* 10 km/h. *Calcular a direção da rota do avião e a velocidade resultante.*

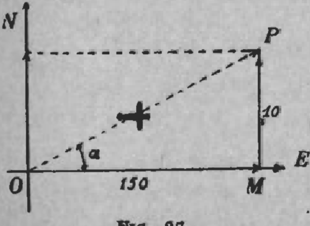

FIG. 27.

Em virtude da velocidade própria e da direção tomada, o avião estaria em M depois de 1 h. Pelo efeito do vento percorreria ao mesmo tempo o espaço MP. A soma dos dois vectores $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{MP}$ dá como resultante o vector $\overrightarrow{OP}$ que representa a velocidade e a direção real do movimento, ou ***rota.***

No triângulo retângulo OMP, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{150} = 0{,}0666$$

donde: $\alpha = 3°50'.$

E o ângulo com o Norte é $90° - 3°50' = 86°10'$.

Também temos:

$$\overline{OP}^2 = 150^2 + 10^2 \; ; \quad OP = \sqrt{150^2 + 10^2} \; ;$$

donde $OP = 150{,}33.$

Respostas: O avião voa na direção **N 86°10'E.**
A velocidade resultante é de **150,33** km/h.

Ploblema IV. — Dadas duas forças concorrentes $F_1 = 10$ **kgf,** $F_2 = 15$ **kgf,** ***aplicadas no ponto*** O, ***e o ângulo*** $F_1OF_2 = 40°$ ***formado pelas suas direções; calcular a resultante e os ângulos que esta resultante forma com as componentes.***

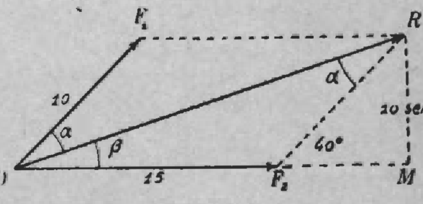

Fig. 28.

Sejam as forças F_1 e F_2 aplicadas em O, (fig. 28). A resultante é igual à soma dos vectores $\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{R}$. Geomètricamente é dada em grandeza direção e sentido pela diagonal OR do paralelogramo construído sobre as componentes.

Sejam α e β os ângulos que fórma com F_1 e F_2.

Temos: $\alpha + \beta = 40°.$

Além disso, temos: $\gamma = 180 - 40 = 140°.$

No triângulo ORF_2 podemos escrever (n.° 39):

$$\overline{OR}^2 = 15^2 + 10^2 + 2 \times 15 \times 10 \times \cos(180 - 140) \; ;$$

donde $\overline{OR} = 23{,}5.$

A resultante OR é igual a **23,5 kgf.**

A determinação dos ângulos α e β, no triângulo ORF_2, poderia ser feita pela relação dos senos (4); porém, como entra o seno de um ângulo obtuso, vamos por enquanto indicar como o problema pode ser resolvido por meio do ângulo agudo.

Tracemos RM perpendicular a OF_2 e consideremos o triângulo retângulo ORM. Temos:

$$RM = 10 \text{ sen } 40^\circ;$$

logo, (n.º 11):

$$\text{sen } \beta = \frac{10 \text{ sen } 40^\circ}{23{,}5} = 0{,}2735$$

donde

$$\beta = \mathbf{15^\circ 50'};$$

e

$$\alpha = 40^\circ - 15^\circ 50' = \mathbf{14^\circ 10'}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. — Resolver os triângulos retângulos seguintes em que a designa a hipotenusa e b e c os catetos:

1) Dados: $a = 32$; $c = 15$; calcular: A, B, C, b e S.
2) Dados: $b = 14$; $c = 18$; calcular: A, B, C, a e S.
3) Dados: $B = 15^\circ 20'$; $b = 2$; calcular: A, C, a, c e S.
4) Dados: $C = 22^\circ 30'$; $a = 10{,}5$; calcular: A, B, b, c e S.

17. — Uma corda subtende, num círculo, um arco de 35º e está a 2 m do centro. Calcular o comprimento da corda e o raio do círculo.

18. — Um triângulo isósceles tem dois ângulos de 58º e uma base de 3,5 m. Calcular os dois lados iguais e o terceiro ângulo.

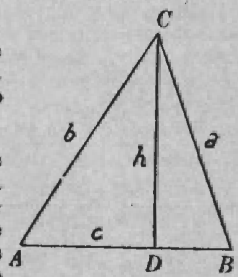

FIG. 29.

19. — De dois pontos A e B situados num plano horizontal, e a uma distância de 200 metros, observam-se os ângulos de elevação de um avião no momento em que este passa pelo plano vertical comum aos dois observadores. Calcular a altura do avião sabendo-se que os ângulos medidos são: $A = 35^\circ 25'$ e $B = 72^\circ 20'$. Notar que a vertical do avião pode cair entre A e B ou fora da base AB. Dar as duas soluções.

20. — Um nadador atravessa um rio dirigindo os seus impulsos perpendicularmente às margens com a velocidade de 4 km/h. As águas do rio têm uma velocidade de 6 km/h. e o rio tem 200 m de largura. Pede-se:

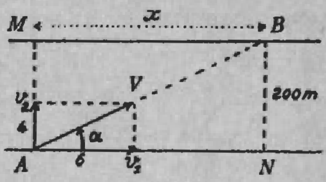

Fig. 30.

1) A velocidade resultante do nadador;

2) o ângulo que a sua rota faz com as margens que se supõem paralelas;

3) a que ponto da margem oposta chegará?

21. — Uma lancha pode desenvolver uma velocidade de 10 km/h. a) Que direção se lhe deve dar para que atravesse, perpendicularmente às margens, um rio em que as águas têm uma velocidade horária de 6 km?

b) Quanto tempo levará para a travessia se o rio tem 200 m. de largura?

c) Qual será a velocidade resultante da lancha?

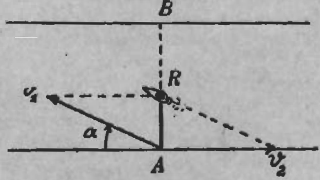

Fig. 31.

22. — Calcular o comprimento do círculo do paralelo terrestre que passa por um ponto de latitude 23°27'. (Fig. 32).

Tomar como raio médio da Terra $R = 6372$ km.

23. — Calcular o índice de refração da água em relação ao ar, sabendo-se, que a um raio incidente que faz com a normal um

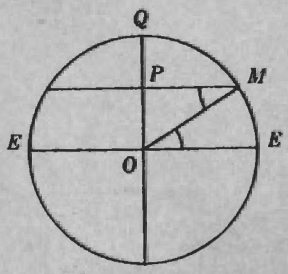

Fig. 32.

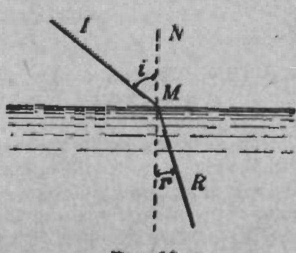

Fig. 33.

ângulo $i = 40'30'$ corresponde, na água, um ângulo de refração de $25°40'$. (Fig. 33).

NOTA. — O índice de refração de uma substância em relação ao ar é igual à razão constante entre o seno do ângulo de incidência, no ar, e o seno do ângulo de refração, na água. Sendo n o índice de refração, i o ângulo de incidência e r o ângulo de refração, devemos ter:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = n.$$

24. — Um artilheiro situado em C atira contra um alvo invisível situado em A, a 2 500 m de distância. Um observador situado em O, a 1 500 m de C, observa um ângulo de $4°20'$ entre o ponto atingido E, e o ponto alvejado A. Qual é a correção, α, que o artilheiro deve fazer, na direção do tiro, para acertar o alvo?

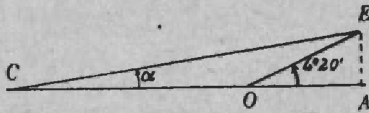

FIG. 34.

25. — Dois navios, A e B, afastados de 10 milhas, observam ao mesmo tempo um submarino R.

O navio A vê o navio B na direção S.48E. e o submarino na direção S.19°E. O navio B vê o submarino na direção S.59°W. Qual é, em milhas, a distância entre o submarino e cada um dos navios? (Fig. 35).

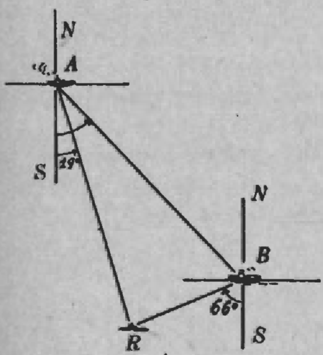

FIG. 35.

26. — Um navio patrulha situado em O observa uma lancha A, a 2 000 m de distância, que se dirige para o norte com certa velocidade desconhecida v_2. Calcular esta velocidade sabendo que a lancha A vista de O está na direção

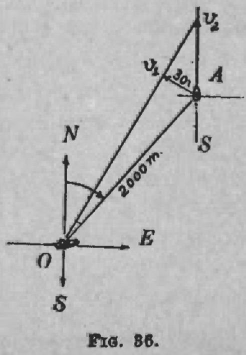

FIG. 36.

N.40°20′E. e que a velocidade aparente v, foi avaliada em 30 km/h. (Fig. 36).

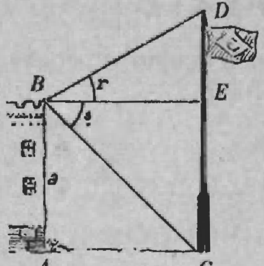

FIG. 37.

27. — Um mastro vertical de bandeira e um edifício têm as suas bases sobre um mesmo plano horizontal. Do alto do edifício medem-se o ângulo de elevação r do topo de mastro e o ângulo de depressão s do pé do mastro. Sabendo-se que o edifício tem a metros de altura, mostrar que a altura do mastro, h, tem por expressão

$$h = a\ (1 + \text{tg}\ r.\ \text{cotg}\ s).$$

Aplicação para: $a = 15$ m.
$r = 12°20'$
$s = 70°35'$.

SEGUNDA PARTE

Funções trigonométricas de um ângulo qualquer

UNIDADE IV

EIXOS E ARCOS ORIENTADOS. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

42. — Reta orientada. — Seja a reta $x'x$ (fig. 38) percorrida pelo móvel M. Quando o móvel se desloca sobre esta reta de x' para x dizemos, por convenção, que ele se desloca no ***sentido positivo*** e percorre segmentos positivos.

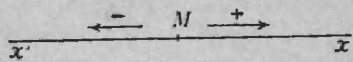

FIG. 38.

Deslocando-se o móvel de x para x' o ***sentido*** do movimento é ***negativo*** e os segmentos percorridos são também negativos.

A reta $x'x$ é uma ***reta orientada***, isto é, ***uma reta na qual se fixou, por convenção, um sentido positivo e um sentido negativo.***

43. — Eixo. — Sobre a reta orientada $x'x$ marquemos um ponto O. Êste ponto divide a reta $x'x$ em duas ***semi-retas.***

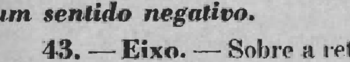

FIG. 39.

A semi-reta Ox é, por convenção, ***positiva*** e a semi-reta Ox' é ***negativa.***

Se escolhermos sobre $x'x$ uma unidade de comprimento, as distâncias de um ponto M, até a origem O, serão contadas ***positivamente***, da origem até o ponto, se M estiver sobre Ox e **negativamente**, da origem até o ponto, se M estiver sobre Ox'. Assim: $OM = +3$ e $OM' = -3$.

A reta xx', assim orientada em relação à origem O, é chamada EIXO.

As distâncias OM e OM' são as ***abcissas*** dos pontos M e M' em relação ao ponto O, e determinam a posição dêsses mesmos pontos sôbre o eixo.

Por extensão, tôda ***reta orientada*** pode ser chamada ***eixo***. Convencionaremos utilizar a palavra ***eixo*** para designar qualquer ***reta orientada***.

44. — Círculo orientado — ***Círculo orientado*** é aquele em que se escolheu um sentido de percurso para um móvel que sôbre êle se desloca. Assim, ***em trigonometria***, o círculo é orientado de tal modo que um móvel se desloca sôbre êle no sentido **positivo** ou **direto** ***quando gira no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relogio, estando o mostrador virado do lado do observador***. O sentido do movimento dos ponteiros é, então, **negativo** ou **retrógado**.

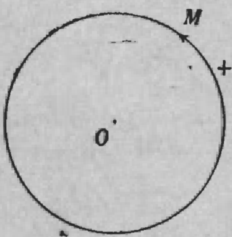

FIG. 40.

45. — Abcissa curvilínea. — ***Extensão da noção de arco.*** — Seja o círculo O, no qual escolhemos um ponto A como origem dos arcos.

O sentido de A para M, é, por convenção, ***positivo***; de A para M', o sentido é ***negativo***.

As ***medidas algébricas*** dos arcos AM e AM' representam as ***abcissas curvilineas*** dos pontos M e M' em relação à origem dos arcos, A.

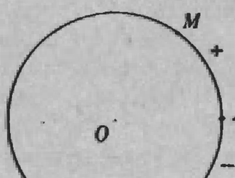

FIG. 41.

Partindo de A no sentido positivo, o móvel M voltará ao ponto A depois de descrever um arco de 2π radianos, ou uma circunferência toda. Se, então, continuar a se deslocar no sentido positivo, e parar além de A, o arco total percorrido será maior do que 2π radianos. Dêste modo podem-se conceber arcos maiores do que uma circunferência. Um arco de 8π radianos, por exemplo, corresponde a 4 voltas de círculo.

46. — Plano orientado. — *Círculo trigonométrico.* — Um plano P, é orientado quando escolhemos sôbre êle um sentido de rotação. O plano de um círculo, será orientado ***positivamente*** quando o círculo traçado sôbre êle tiver orientação ***positiva*** ou ***direta*** (sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio).

Círculo trigonométrico *é todo círculo orientado no qual o raio é a unidade escolhida para dimensionar linhas e arcos que se referem a êsse mesmo círculo.*

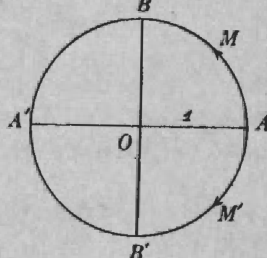

FIG. 42.

Seja, (fig. 42), um círculo de centro O, orientado positivamente no sentido do arco AM, sendo A a origem dos arcos.

Tracemos os dois diâmetros perpendiculares AA' e BB'. Prolongados indefinidamente êstes diâmetros formam dois ***eixos*** de origem comum, O. Por convenção, o eixo AA' é ***positivo*** de O para A; é ***negativo*** de O para A'; é o eixo de ***abcissas***. Do mesmo modo, o eixo BB' é positivo de O para B e negativo de O para B'; é o eixo de ***ordenadas***.

Lembrados que neste círculo o ráio serve de unidade, teremos:

$$\overline{OA} = 1; \quad \overline{OA'} = -1; \quad OB = +1; \quad OB' = -1;$$

$$AMB = \frac{\pi}{2}; \quad AM'B' = -\frac{\pi}{2}.$$

47. — Radiano. — A unidade de arco, no círculo trigonométrico é o **radiano,** já definido e estudado no número 5. Se dividirmos o círculo trigonométrico em 8 partes iguais, os arcos terminados nesses 8 pontos e com mesma origem A, serão respectivamente, em radianos:

$$\frac{\pi}{8},\ 2\times\frac{\pi}{8},\ 3\times\frac{\pi}{8},\ 4\times\frac{\pi}{8},\ 5\times\frac{\pi}{8},\ 6\times\frac{\pi}{8},\ 7\times\frac{\pi}{8},\ 8\times\frac{\pi}{8},\ \ldots$$

ou
$$\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi,\ \ldots$$

Eis alguns arcos cujo equivalente em radianos é conveniente conhecer de memória.

arco de 30°,	ou	$\frac{\pi}{6}$ radianos
arco de 45°,	ou	$\frac{\pi}{4}$ rd.
arco de 60°,	ou	$\frac{\pi}{3}$ rd.
arco de 90°,	ou	$\frac{\pi}{2}$ rd.
arco de 120°	ou	$\frac{2\pi}{3}$ rd.
arco de 135°,	ou	$\frac{3\pi}{4}$ rd.
arco de 180°	ou	π rd.
arco de 270°,	ou	$\frac{3\pi}{2}$ rd.
arco de 360°,	ou	2π rd.

48. — Quadrantes. — O círculo trigonométrico é dividido em quatro partes iguais pelos eixos AA' e BB'; cada uma dessas partes é um **quadrante.** São êles:

arco $\overset{\frown}{AB}$, ou 1.° quadrante; de 0° até 90°;

arco $\overset{\frown}{BA'}$, ou 2.° quadrante; de 90° até 180°;

arco $\overset{\frown}{A'B'}$, ou 3.° quadrante; de 180° até 280°;

arco $\overset{\frown}{B'A'}$, ou 4.° quadrante; de 270° até 360°.

Dizemos que um arco é, por exemplo, do 3.° quadrante quando termina no terceiro quadrante; a origem é sempre o ponto A. Dado um arco maior do que 360°, é sempre útil saber em que quadrante termina. Para isso, divide-se êsse arco por 360°; o resto, necessàriamente menor do que 360°, indica em que quadrante o arco termina.

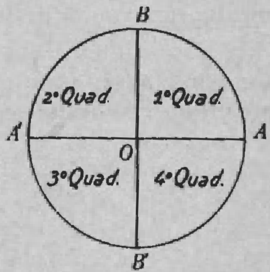

FIG. 43.

Exemplo. — Em que quadrante termina o arco de 2 722°?

Temos:

$$2\,722 = 7 \times 360 + \mathbf{202}.$$

O arco de 202° está compreendido entre 180° e 270°; o arco de 2 722° termina, pois, no terceiro quadrante; dizemos, abreviadamente, que ***é um arco do terceiro quadrante.***

49. — Complemento e suplemento. — Dois arcos são complementares quando a sua soma algébrica iguala 90° ou $\frac{\pi}{2}$, e suplementares quando a sua soma iguala

180° ou π. O complemento do arco $\overset{\frown}{AM}$ é o arco $\overset{\frown}{BM}$ e seu suplemento é o arco $\overset{\frown}{A'M}$ (fig. 42).

Dado o arco, a, o seu complemento será $90°—a$, e o seu suplemento $180°—a$.

Dois arcos suplementares α e $\pi—\alpha$ de mesma origem A, terminam o primeiro em M e o segundo em M', de modo que MM' é paralela ao eixo AA', porque os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{A'M'}$ são iguais; os pontos M e M' são simétricos em relação ao diâmetro BB' (fig. 44).

50. — Arcos de mesma origem, mesmo sentido e mesma extremidade. — Se α designar um arco qualquer $\overset{\frown}{AM}$, k um inteiro qualquer, positivo, negativo ou nulo, ***todos os arcos a, de mesma origem, mesmo sentido e mesma extremidade que o arco α são dados pela fórmula:***

$$\boxed{a = 2k\pi + \alpha} \qquad (8)$$

Com efeito, ao arco α, basta acrescentar um número qualquer de circunferências completas, positivas ou negativas (a saber, o arco $2k\pi$), para se obter o resultado desejado.

Tais arcos, que diferem, de um número inteiro de circunferências, denominam-se arcos ***côngruos.***

Os arcos dados pela fórmula (8) são ***coterminais*** e constituem as diversas ***determinações do arco α.***

51. — Arcos de mesma origem, mesmo sentido e de extremidades sôbre uma mesma paralela ao diâmetro que passa pela origem. — ***Todos os arcos de mesma origem, mesmo sentido e de extremidades***

situadas sôbre uma mesma paralela ao diâmetro que passa pela origem, são dados pelas fórmulas (fig. 44):

$$\boxed{a = 2k\pi + \alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{a = (2k+1)\pi - \alpha} \qquad (9)$$

Com efeito, ao arco AM ou α corresponde o arco suplementar AM' ou $\pi - \alpha$, de extremidade M' situada sôbre MM' paralela ao diâmetro AA' (*Geom. c. sup.*, n.º 121). Acrescentando-se a êsse arco um número completo de circunferências ($2k\pi$), todos os arcos terminados em M são dados pela fórmula:

$$a = 2k\pi + \alpha$$

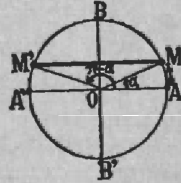

FIG. 44.

e todos os arcos terminados em M' são dados pela fórmula:

$$a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

k designando qualquer inteiro positivo, negativo ou nulo.

As duas equações (9) podem resumir-se pela única fórmula:

$$\boxed{a = k\pi + (-1)^k \alpha} \qquad (10)$$

que exprime os mesmos resultados: k designa qualquer inteiro par ou impar.

52. — Arcos de mesma origem, mesmo sentido e de extremidades sôbre um mesmo diâmetro. — ***Todos os arcos de mesma origem, mesmo sentido e de extremidades situadas sôbre um mesmo diâmetro, são dados pela fórmula:***

$$\boxed{a = k\pi + \alpha} \qquad (11)$$

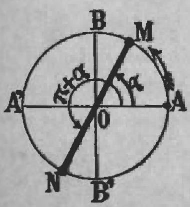

FIG. 45.

Com efeito, seja o arco AM ou α; tracemos o diâmetro MN; o arco AN será igual a α + *arco* $MA'N$ ou $\pi + \alpha$ (fig. 45).

Acrescentando-se a êste arco um número completo de circunferência, todos os arcos terminados em M são dados pela fórmula:

$$a = 2k\pi + \alpha. \qquad \textbf{(a)}$$

e todos os arcos terminados em N são dados pela fórmula:

$$a = (2k + 1)\pi + \alpha, \qquad \textbf{(b)}$$

k designando qualquer inteiro, positivo, negativo ou nulo.

Na fórmula (**a**), $2k$ significa qualquer número par e na fórmula (**b**), $2k + 1$ designa qualquer número impar; logo, essas 2 fórmulas resumem-se nesta:

$$a = k\pi + \alpha,$$

na qual k representa qualquer inteiro, par ou ímpar.

Se k for par, o arco termina em M; se k for ímpar, o arco termina em N.

53. — Arcos da mesma origem e de extremidades situadas sôbre uma mesma perpendicular ao diâmetro que passa pela origem. — ***Todos os arcos de mesma origem e de extremidades situadas sôbre uma mesma perpendicular ao diâmetro que passa pela origem, são dados pela fórmula***

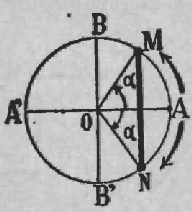

Fig. 46.

$$\boxed{\mathbf{a = 2k\pi \pm \alpha}} \qquad \textbf{(11)}$$

Com efeito, seja α qualquer um dêsses arcos $\overset{\frown}{AM}$ e MN perpendicular a AA', diâmetro que passa pela origem; como o arco $\overset{\frown}{AN}$ é igual ao arco $\overset{\frown}{AM}$ (***Geom.*** n.º 121) e é de sentido contrário, temos $\overset{\frown}{AN} = -\alpha$ (fig. 46).

Acrescentando-se a êsses arcos, α e $-\alpha$, qualquer número de circunferências ($2k\pi$), temos a fórmula

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

que dá todos os arcos terminados em M ou N, sendo k qualquer inteiro, positivo, negativo ou nulo.

54. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Num sistema de coordenadas retangulares, construir os pontos***

$A(2,-5)$; $B(-3,0)$; $C(5,3)$.

O primeiro algarismo representa a abscissa do ponto e o segundo a ordenada. Localizar o ponto D (fig. 47).

Sejam $X'X$ e $Y'Y$ os eixos e O a origem de coordenadas. Seja determinar o ponto A, de abscissa 2 e ordenada -5. Pelo ponto de abscissa 2 passamos uma paralela ao eixo de ordenadas $Y'Y$ e pelo ponto de ordenada 3 traçamos uma paralela ao eixo de abscissas $X'X$. Na intersecção dessas paralelas temos o ponto A. Procede-se do mesmo modo para os pontos B e C. O ponto D tem por coordenadas aproximadas:

abscissa $=-4$ e ordenada $=5$; é o ponto $D(-4,5)$.

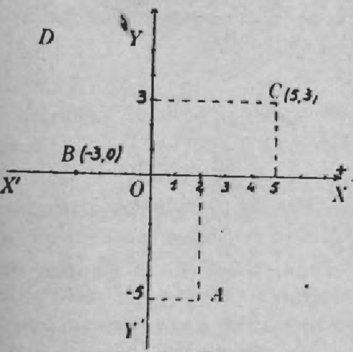

Fig. 47.

II. — ***Dar em radianos o arco de*** 135°. ***Dar a resposta em função de*** π.

Uma simples regra de três nos dá:

$$\frac{\pi \times 135}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

Logo: arco de $135° = \dfrac{3\pi}{4}$ radianos.

III. — ***Em que quadrantes terminam os arcos de*** 729° ***e*** $-3245°$?

1) Dividindo-se 729 por 360, obtemos:

$$729° = 2 \text{ vezes } 360 + 9°.$$

Logo, o arco termina no **1.° quadrante.**

2) Dividindo-se 3 245 por 360, obtemos:

$$3\,245° = 9 \times 360° + 5°$$

O arco $-3\,245^\circ$ sendo negativo, também o resto é negativo; e o arco de -5° termina no **4.° quadrante.**

IV. — ***Dizer quais são as 3 primeiras determinações positivas do arco*** -30°.

Se ao arco -30°, acrescentarmos sucessivamente 360°, teremos as determinações pedidas. Temos:

$$-30^\circ + 360^\circ = 330^\circ$$
$$330^\circ + 360^\circ = 690^\circ$$
$$690^\circ + 360^\circ = 1\,050^\circ$$

Poderíamos, também, ter utilizado a fórmula (**8**)

$$a = 2k\pi + \alpha.$$

Teríamos:

$$a_1 = 2 \times 1 \times \pi + (-30^\circ) = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ;$$

a assim, fazendo sucessivamente $k = 2$, $k = 3$, teríamos as duas outras determinações.

V. — ***Dado, no círculo trigonométrico, um arco de*** 50°, ***calcular:***

1.° ***o menor arco positivo de mesma origem e coterminal do arco dado;***

2.° ***o menor arco positivo de mesma origem que tenha a extremidade numa mesma paralela ao eixo*** $A'A$;

3.° ***o menor arco negativo que termine, com o arco dado, numa mesma paralela ao eixo*** $B'B$.

1.° O menor arco positivo ***coterminal*** é dado pela fórmula (**8**) em que fazemos $k = 1$.

Temos:

$$a_1 = 2\pi + 50^\circ = \mathbf{410^\circ}$$

2.° O menor arco positivo que termina numa mesma paralela ao eixo AA' é dado pela fórmula (**10**) em que fazemos $k = 1$; temos:

$$a_1 = \pi + (-1)50^\circ = \mathbf{130^\circ}.$$

Êste arco é o suplemento do arco dado.

3.° O menor arco negativo que termina numa mesma paralela ao eixo BB' é o arco de $\mathbf{-50^\circ}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28. — Num sistema de coordenadas retangulares determinar os seguintes pontos:

$$A(2,7);\ B(-5,0);\ C(-2,-5);\ D(0,-3).$$

29. — Qual é em radianos o valor dos seguintes arcos:

$$210^\circ,\ 75^\circ,\ 162^\circ,\ 112^\circ 30'.$$

Dar o resultado em função de π.

30. — Supondo-se que, no círculo trigonométrico o raio origem OA indica o Norte, OB', Leste, etc., calcular em graus positivos os azimutes (n.º 25) das seguintes direções:

a) $N.20^\circ W$;

b) $S.30^\circ W$;

c) $S.15^\circ E.$;

d) $N.80^\circ E$.

O Sul deve ser escolhido como origem dos arcos.

31. — Dizer o quadrante em que terminam os arcos seguintes:

$$112^\circ,\ 335^\circ,\ 2\,732^\circ,\ -578^\circ$$

32. — Dar o menor arco positivo e o menor arco negativo coterminais dos arcos seguintes:

$$105^\circ,\ 250^\circ,\ -70^\circ,\ -439^\circ.$$

33. — Qual é o suplemento dos arcos seguintes:

$$30^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ,\ 340^\circ?$$

34. — O eixo óptico da luneta de um teodolito está dirigido horizontalmente para certo ponto e faz $25^\circ 22'$ com o zero do limbo horizontal do instrumento, graduado de 0° até 360°. Faz-se girar a luneta, horizontalmente, de modo que o seu eixo esteja numa direção perpendicular à direção inicial. Qual será a nova leitura sôbre o limbo graduado? Dar as duas respostas possíveis, notando-se que a luneta pode ter sido deslocada para a direita ou para a esquerda.

35. — O ângulo de elevação da estrela α do Centauro é, em dado momento, de $32^\circ 25'$ acima do horizonte. Calcular a sua ***distância zenital*** ou o menor ângulo que a direção da estrela faz com a vertical do observador.

UNIDADE V

GRANDEZAS — VECTORES — TEOREMA DE CHASLES

PROJEÇÕES DE UM VECTOR SOBRE UM EIXO

55. — Grandezas. — As ***grandezas*** científicas exprimem-se por meio de ***números*** acompanhados geralmente de outras notações que servem para melhor defini-las.

As grandezas podem ser classificadas em ***modulares, escalares*** e ***vectoriais.***

A GRANDEZA MODULAR exprime-se por meio de um ***número aritmético***; resulta da simples comparação da grandeza medida com a unidade adotada. Assim, diremos que uma reta tem 5 metros porque contém 5 vêzes a unidade de comprimento, o ***metro.***

Comprimentos, áreas, volumes, massas, são geralmente, grandezas modulares, representadas por ***números absolutos.***

A GRANDEZA ESCALAR exprime-se por meio de ***números algébricos;*** isto é, admite sinal positivo ou negativo, sendo assim representadas por um ***número relativo.***

Por exemplo, uma ***temperatura*** de 20°, pode ser contada ***acima*** ou ***abaixo*** do ***zero*** da escala termométrica. No primeiro caso exprime-se pelo símbolo + 20° e no segundo por — 20°.

Os números escalares referem-se a uma ***escala*** ou ***eixo***; são contados positivamente de um lado da origem, e negativamente do lado oposto.

A GRANDEZA VECTORIAL requer, para sua completa determinação, além do ***valor numérico,*** certos característicos de ***orientação;*** tais são as grandezas ***físicas: força,***

velocidade, acceleração, ou ***geométricas:*** segmentos de retas orientadas.

Para se representar completamente uma grandeza vectorial, associamos, pois, uma ***imagem geométrica*** à grandeza numérica. Essa imagem da grandeza escalar é denominada VECTOR.

56. — Vector. — Uma grandeza vectorial pode ser representada geomètricamente por meio de um ***vector.***

Seja, fig. 11, a ***reta orientada*** $x'x$. Sôbre esta reta tomamos um ***segmento*** AB e indicamos por meio de uma ***seta*** que êle deve ser percorrido no ***sentido*** de A para B.

FIG. 48.

O elemento geométrico ***AB,*** assim definido, representa uma ***grandeza vectorial.*** Com efeito, é definido em ***grandeza*** ou ***módulo, direção*** e ***sentido.***

MÓDULO: é o valor absoluto do segmento AB, medido com uma unidade arbitrária de extensão linear; designaremos o ***módulo,*** ou ***valor absoluto*** de um segmento de reta, pelo símbolo

$$|AB| \text{ ou simplesmente } AB.$$

DIREÇÃO: é dada pela reta $x'x$ que serve de SUPORTE ao segmento AB.

SENTIDO: é indicado pela ***seta.***

Quando nos referirmos a uma ***grandeza vectorial*** representada pelo ***elemento geométrico*** AB, escreveremos o símbolo:

$$\overrightarrow{AB};$$

ou, mais simplesmente,

$$\vec{v}.$$

Nêste último símbolo vectorial, v, representa o módulo do vector $\vec{v}$.

57. — Medida algébrica de um vector. — Seja $\overrightarrow{AB}$, fig. 48, um vector que tem por suporte a reta orientada $x'x$. Dizemos também que o vector $\overrightarrow{AB}$ ***é localizado no eixo*** $x'x$.

MEDIDA ALGÉBRICA DO VECTOR $\overrightarrow{AB}$ é o número que exprime o ***módulo*** deste vector, afetado do sinal $+$ ou $-$, conforme o sentido do vector fôr o sentido positivo ou o sentido negativo do eixo suporte.

Designaremos o valor algébrico do vector $\overrightarrow{AB}$ pelo símbolo

$$\overline{AB}.$$

Este mesmo símbolo designará o valor algébrico de um segmento qualquer de reta orientada.

Se $\overline{AB}$ fôr positivo, o segmento percorrido em sentido contrário $\overline{BA}$ será negativo. Entre os seus valores algébricos teremos a igualdade:

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

58. — Teorema de Chasles. — ***Sôbre uma reta dirigida, a soma algébrica de 3 segmentos consecutivo é sempre nula quando a extremidade do último coincide com a origem do primeiro.***

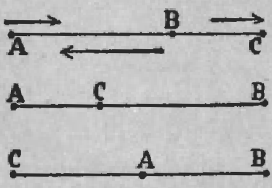

FIG. 49.

Sejam os 3 pontos A, B, C, de uma reta dirigida; para qualquer posição, teremos sempre (fig. 49):

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Com efeito: 1.º ***Supondo-se AB positivo,*** o ponto C pode ocupar as 3 posições A, B, C; A, C, B; C, A, B (fig. 49). E temos:

1.º caso: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = - \overline{CA},$

ou $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0;$

2.º caso: $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},$

ou $-\overline{CA} - \overline{BC} = \overline{AB},$

ou $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0;$

3.º caso: $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB} = - \overline{BC},$

ou $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$

2.º ***Supondo-se AB negativo,*** há 3 posições análogas, que se reduzem às 3 precedentes com a condição de se tomar como positivo o sentido da direita para a esquerda.

Logo, a relação $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ é verificada para todos os casos.

Generalização. — ***sôbre uma reta dirigida, a soma algébrica de um número qualquer de segmentos consecutivos é sempre nula quando a extremidade do último coincide com a origem do primeiro.***

Suponhamos o teorema verdadeiro para os n pontos $A, B, C, \ldots K, L,$ dispostos de modo qualquer sôbre uma reta dirigida; então, temos, com essa suposição:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\ldots+\overline{KL}+\overline{LA} = 0. \qquad (1)$$

Acrescentemos mais um ponto, M e consideremos os 3 pontos $A, L, M,$ temos (n.º 53):

$$\overline{AL} + \overline{LM} + \overline{MA} = 0. \qquad (2)$$

Somemos (**1**) e (**2**) membro a membro; notando que $\overline{LA} + \overline{AL} = 0$; vem:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{KL} + \overline{LM} + \overline{MA} = 0. \quad (\mathbf{3})$$

Portanto, se o teorema for verdadeiro para n pontos, sê-lo-á para $n+1$ pontos; ora, foi demonstrado para 3 pontos; logo, é verdadeiro para 4 pontos, para 5, para 6,... ; é verdadeiro para todos os casos.

Sôbre uma reta dirigida, a soma algébrica de vários segmentos consecutivos é igual ao segmento que une a origem do 1.º à extremidade do último.

Com efeito, os segmentos consecutivos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$,... $\overline{LM}$ satisfazem à relação (**3**) e temos:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{LM} = -\overline{MA} = \overline{AM}.$$

Nota. — O segmento $\overline{AM}$ que começa na origem do primeiro e termina na extremidade do último chama-se ***resultante*** de todos êsses segmentos retilíneos consecutivos e a proposição precedente enuncia-se: ***A soma algébrica de vários segmentos retilíneos consecutivos é igual à sua resultante.***

57. — Projeção de um ponto sôbre um eixo. (1)

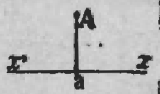

FIG. 50.

— ***Projeção ortogonal de um ponto A sobre um eixo orientado x'x é o pé da perpendicular Aa abaixada do ponto sobre o eixo de projeção*** (fig. 50).

Eixo de projeção é a reta orientada $x'x$ sôbre a qual se fazem as projeções.

Escreve-se:

$$pr.\ A = a.$$

(1) Neste número e nos que seguem consideramos apenas sistemas situados num mesmo plano.

59. — Projeção de um vector. — *A projeção de um vector $\overrightarrow{AB}$ sôbre um eixo $x'x$ situado no mesmo plano é outro vector que tem como módulo o segmento $\overline{ab}$ do eixo que une a projeção da origem A à projeção da extremidade B* (fig. 51).

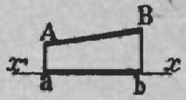

FIG. 51.

Ecreve-se:

$$\text{pr.}\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ab}.$$

Aa e Bb são os segmentos ***projetantes*** de A e de B.

Nota. — 1.° ***A projeção é igual ao próprio vector para um vector paralelo ao eixo;*** é positiva quando o vector e o eixo têm mesmo sentido; é negativa no caso contrário.

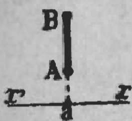

FIG. 52.

2.° ***A projeção é nula para um vector nulo ou perpendicular ao eixo*** (fig. 52).

3.° ***A projeção é menor que o vector*** cada vez que êste não é paralelo ao eixo (fig. 51).

60. — Projeção de um contorno poligonal. — ***Contorno, circuito*** ou ***linha poligonal*** é formado por uma sucessão de vectores consecutivos não em linha reta, situados num mesmo plano; exemplo: o contorno $ABCDE$ (fig. 53). O ponto de partida, A, do móvel que percorre o contorno chama-se ***origem*** e o ponto de chegada, E, ***extremidade.***

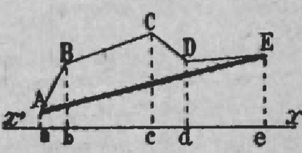

FIG. 53.

Resultante do contorno ou ***soma geométrica dos vectores consecutivos*** é, por definição, o vector $\overrightarrow{AE}$ que une a origem A com a extremidade E.

O módulo da projeção de um contorno poligonal sôbre um eixo $x'x$ situado no seu plano é igual à soma das projeções dos módulos dos vectores que formam o contorno.

Por exemplo, temos (fig. 53):

$$\text{pr.}(ABCDE) = \text{pr.}\,\overline{AB} + \text{pr.}\,\overline{BC} + \text{pr.}\,\overline{CD} + \text{pr.}\,\overline{DE} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}.$$

61. — Teorema. — ***A projeção de um contorno sôbre um eixo é igual à projeção da resultante.***

Seja o contorno poligonal $ABC\ldots LM$ e sua resultante AM, e $a, b, c, \ldots l, m$, as projeções de cada vértice; temos:

$$\text{pr.}(ABC\ldots LM) = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \ldots + \overline{lm}$$

e
$$\text{pr.}\overline{AM} = \overline{am}.$$

Ora, sôbre o eixo de projeção, o teorema de Chasles dá (n.º 54):

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \ldots + \overline{lm} + \overline{ma} = 0;$$

donde vem:
$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \ldots \overline{lm} = -\overline{ma} = \overline{am},$$

ou
$$\text{pr.}(ABC\ldots LM) = \text{pr.}\,\overline{AM}.$$

62. — Corolários. — 1.º ***A projeção de um contorno sôbre um eixo é nula em 2 casos:*** quando a resultante é nula e quando ela é perpendicular ao eixo.

2.º ***A projeção de um contorno fechado sobre qualquer eixo é sempre nula.***

Porque essa projeção é igual à da resultante, que é nula.

3.º ***Dois contornos de mesma origem e mesma extremidade, têm sempre projeções iguais*** sôbre um mesmo eixo.

Isto porque a projeção de cada contorno é igual à da resultante, a qual é comum a ambos.

63. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Representar dois vectores de mesma origem O, de módulos respectivos 5 e 8, sabendo que suas direções fazem um ângulo de 120°.*** Pelo ponto O, tracemos duas semi-retas cujas direções façam um ângulo de 120°. Sôbre essas semi-retas transportemos, sucessivamente, a partir de O, uma unidade escolhida arbitràriamente. Obtemos assim os vectores $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ cujos módulos respectivos são $v = 5$ e $v' = 8$.

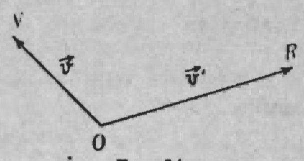

FIG. 54.

II. — ***Num sistema de coordenadas retangulares está representado um contorno poligonal ABCD. Calcular as projeções dêste contorno sobre cada um dos eixos de coordenadas conhecendo as coordenadas de cada um dos pontos A, B, C e D:***

$$A(-2,3); \quad B(1,5); \quad C(4,4); \quad D(2,-3).$$

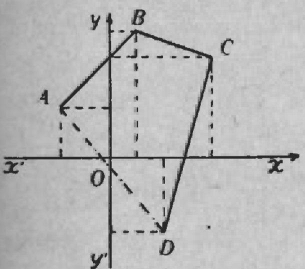

FIG. 55.

A *resultante* do contorno é o segmento AD.

a) PROJEÇÃO SOBRE $x'x$: — O ponto A projeta-se no ponto de abscissa -2 e o ponto D no ponto de abscissa 2. A projeção tem, pois, como módulo o segmento compreendido entre -2 e 2 e percorrido no sentido positivo; logo:

$$\text{proj. } \overline{AD} \text{ sobre } x'x = 2 + 2 = 4.$$

b) PROJEÇÃO SÔBRE $y'y$. — O ponto A projeta-se sôbre $y'y$ no ponto de ordenada 2 e o ponto D no ponto de ordenada -3. A projeção tem como módulo o segmento de 2 até -3, percorrido, pois, no sentido negativo do eixo; temos:

$$\text{proj. } \overline{AD} \text{ sôbre } y'y = -2 - 3 = -5.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36. — Representar geomètricamente:

1.° Um segmento AB de comprimento 5 em relação a uma unidade escolhida arbitràriamente;

2.º Um segmento $\overline{AB}$ de comprimento —5; representar o eixo dirigido que serve de suporte a $\overline{AB}$;

3.º Um vector $\overrightarrow{AB}$ de módulo 5 que faz um ângulo de 225º com a direção positiva de um eixo que passa pela sua origem A.

37. — Um quadrilátero $ABCD$, representado num sistema de coordenadas retangulares tem como vértices $A(2,3)$, $B(4,1)$, $C(-1, -4)$, $D(-3, -2)$.

1.º Calcular as projeções de cada lado sôbre os eixos de coordenadas.

2.º Qual é a natureza do quadrilátero?

3.º Mostrar que a projeção do contorno fechado $ABCDA$ é nula.

38. — Uma roda tem 1 m de raio. Mostrar como varia a projeção de um dos raios sobre um diâmetro horizontal $A'A$, tomado como eixo de projeção.

Tomando-se o centro do círculo como origem do eixo, calcular as projeções do raio considerado, para os arcos seguintes, contados no sentido trigonométrico (46) a partir da extremidade direita, A, do diâmetro:

0º, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º, 360º.

UNIDADE VI

FUNÇÕES CIRCULARES

64. — Coordenadas do círculo trigonométrico. — Pelo centro O, de um círculo, tracemos os diâmetros perpendiculares AA' e BB'. Prolongados indefinidamente, êstes diâmetros constituem dois ***eixos de referência*** ou ***de coordenadas.***

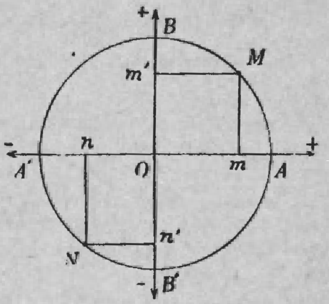

FIG. 56.

A orientação dos eixos é a seguinte:

de O para A, positivo $(+)$;
de O para A', negativo $(-)$;
de O para B, positivo $(+)$;
de O para B', negativo $(-)$;

Um ponto qualquer M, do círculo pode ser referido aos eixos. Assim, projetemos ortogonalmente o ponto M sobre os eixos e sejam m a projeção sobre OA, e m' a projeção sobre OB.

O valor algébrico do segmento Om, contado desde a origem O, até a projeção m, representa a ***abcissa*** do ponto M.

O valor algébrico de Om', representa a ***ordenada*** do ponto M.

Na figura 24, notemos que o ponto M tem abcissa positiva e ordenada positiva. O ponto N, do 3.º quadrante, tem ordenada negativa e abscissa negativa.

A ***abscissa*** e a ***ordenada*** constituem as duas ***coordenadas do ponto*** M, e determinam perfeitamente a sua posição no círculo trigonométrico.

SEGMENTO UNITÁRIO. — Na avaliação destas coordenadas, adota-se, como ***unidade linear***, o ***raio do círculo***, R. A abscissa Om é representada por um número menor do que 1, em valor absoluto.

65. — Projeções do raio. — Seja o círculo trigonométrico O, fig. 57. Consideremos o ponto M, extremidade do arco AM, correspondente ao ângulo central α.

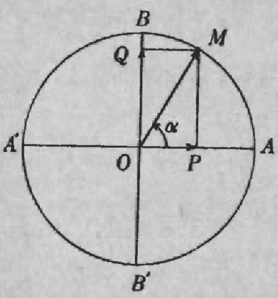

FIG. 57.

O raio OM pode ser considerado como um vector $\overrightarrow{OM}$, localizado no ponto O, e podendo girar de 360° quando o ponto M descreve a circunferência.

Projetemos ortogonalmente $\overrightarrow{OM}$ sobre os eixos; temos:

$$\overrightarrow{OP} = \text{proj. de } \overrightarrow{OM} \text{ sobre } AA';$$

$$\overrightarrow{OQ} = \text{proj. de } \overrightarrow{OM} \text{ sobre } BB'.$$

Os valores algébricos de $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ dependem da posição de M sobre a circunferência, isto é, do arco $\overset{\frown}{AM}$ ou do ângulo α. Dizemos que ***são funções do ângulo*** α.

66. — Funções circulares. — ***Funções circulares de um arco são segmentos de retas cujos valores algébricos dependem do ângulo*** α ***que subtende êste arco; são funções do arco ou do ângulo central correspondente.***

As funções circulares são seis: ***seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante*** e ***co-secante***. Estas funções, definidas aqui em relação ao raio do círculo trigonométrico, já foram referidas aos lados de um triângulo retângulo como funções dos ângulos desse triângulo (n.º **11**).

67. — Seno e co-seno de um arco. — Seja o círculo trigonométrico O, e o arco $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

Co-seno do arco $\overset{\frown}{AM}$ é o valor algébrico do segmento $\overline{OP}$, isto é, da ***projeção do raio***, ***vector*** $\overrightarrow{OM}$ sobre o eixo AA' que passa pela origem do arco $\overset{\frown}{AM}$.

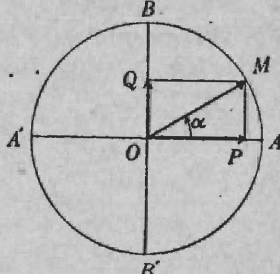

FIG. 58.

$$\cos \overset{\frown}{AM} = \overrightarrow{OP},$$

e lemos: co-seno do arco $\overset{\frown}{AM}$ = vector $\overrightarrow{OP}$.

E, pois que a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$ é a mesma do ângulo central α, temos, conservando-se apenas o valor algébrico do vector $\overrightarrow{OP}$:

$$\mathbf{cos}\ \alpha = \overline{OP}. \qquad \text{(a)}$$

Seno do arco $\overset{\frown}{AM}$ ou do ângulo central α, é o valor algébrico $\overline{OQ}$ da projeção do vector $\overrightarrow{OM}$ sobre o eixo BB'. E escrevemos a notação:

$$\text{sen}\ \overset{\frown}{AM} = \overrightarrow{OQ};$$

$$\mathbf{sen}\ \alpha = \overline{OQ}. \qquad \text{(b)}$$

Observação. — O seno e o co-seno do ângulo α, assim definidos são idênticos, em valor absoluto, ao seno e co-seno definidos como razões trigonométricas (n.º **11**).

Com efeito, no triângulo retângulo OMP, podemos escrever, observando que $OM = R = 1$:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MP}{OM} = MP = OQ.$$

Notemos agora que a fórmula (**b**) nos dá:

$$\text{sen}\ \alpha = \overline{OQ}.$$

O segmento $\overline{OQ}$ é agora ***qualificado;*** tem um ***valor algébrico, positivo ou negativo,*** conforme for tomado, a partir de O, para cima ou para baixo do eixo $A'A$.

Para o co-seno, teríamos:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} = OP.$$

E a fórmula (**a**) define o co-seno como sendo:

$$\cos \alpha = \overline{OP};$$

isto é, o segmento $\overline{OP}$ deve ser considerado com o seu sinal algébrico: positivo para direita de O e negativo quando orientado para a esquerda da origem.

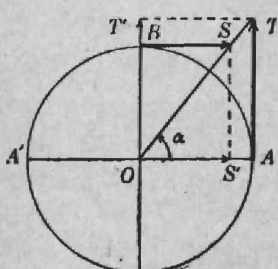

FIG. 59.

68. — Tangente e co-tangente. — Consideremos o arco $\overset{\frown}{AM} = \alpha$. Tracemos o raio OM que prolongamos. Tracemos também as tangentes ao círculo, nos pontos A e B que prolongamos até o seu encontro com o prolongamento do raio OM ***que passa pela extremidade do arco*** $\overset{\frown}{AM}$.

a) Tangente. — Por definição, tangente do arco α é a projeção do vector $\overrightarrow{AT}$ sobre o eixo BB'; temos:

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{pr.}\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT};$$

ou, considerando apenas o segmento orientado $\overline{AT}$ que é igual a $\overline{OT'}$ por ser paralelo ao eixo, temos:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{AT}. \qquad \textbf{(a)}$$

b) Cotangente. — Por definição, cotangente do arco α é a projeção do vector $\overrightarrow{BS}$ sobre o eixo AA'. Temos:

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{pr.}\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS'}$$

Mas, o vector $\overrightarrow{BS}$ é paralelo ao eixo de projeções; logo, o valor algébrico da projeção é $\overline{BS}$; e temos:

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \overline{BS}. \qquad \textbf{(b)}$$

Observações. — 1) No triângulo retângulo OAT, temos:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OA};$$

ou, por ser $\overline{OA} = 1$:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = AT.$$

É esta a razão trigonométrica já definida (n.º 11). A fórmula (**a**) difere desta última porque agora consideramos não apenas o módulo AT mas a orientação, positiva ou negativa desse segmento e escrevemos:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{AT}.$$

O segmento AT é positivo para cima de AA' e negativo quando dirigido para baixo de AA'.

2) O triângulo retângulo OSS' dá:

$$\cot g\, \alpha = \frac{OS'}{SS'} = \frac{OS'}{OB} = OS' = BS.$$

Na fórmula (b) temos:

$$\cot g\, \alpha = \overline{BS}.$$

Estas fórmulas indicam que o módulo da co-tangente é o mesmo nas duas definições. Porém, nesta segunda, o segmento BS é qualificado; positivo quando orientado para a direita do eixo BB' e negativo quando dirigido para a esquerda desse mesmo eixo.

3) O ponto A é a origem de todas as tangentes, qualquer que seja o arco α; do mesmo modo, o ponto B é origem de todas as co-tangentes.

69. — Secante e co-secante. — Consideremos novamente a figura 59.

a) **Secante.** — Por definição, secante do arco α, é o vector $\overrightarrow{OT}$ que une o centro do círculo à extremidade da tangente. Temos:

$$\sec \alpha = \overrightarrow{OT}.$$

Este vector é considerado positivo quando passa pela extremidade do arco $\overset{\frown}{AM}$; é negativo quando apenas o seu prolongamento é que passa pela extremidade do arco α.

b) **Co-secante.** — Por definição, co-secante do arco α é o vector $\overrightarrow{OS}$ que une o centro do círculo com a extremidade da co-tangente. Temos:

$$\text{cosec}\, \alpha = \overrightarrow{OS}.$$

A convenção de sinal da co-tangente é a mesma do que para a tangente.

Observações. — Pelas definições do número 11, teríamos (fig. 59):

$$\sec \alpha = \frac{OT}{OA} = OT;$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OS}{SS'} = \frac{OS}{OB} = OS.$$

Vê-se que são os módulos das funções secante e co-secante como acabam de ser definidas.

70. — Funções circulares de um arco. — As 6 funções circulares são, pelo exposto nos números anteriores, segmentos orientados que dependem, no círculo trigonométrico, do arco a.

A figura 60 representa as 6 funções circulares de um arco AM terminado no 1.° quadrante. Adoptando-se o diâmetro $A'A$ como eixo horizontal e o diâmetro $B'B$ como eixo vertical, temos:

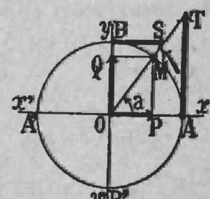

FIG. 60.

1) **Seno** ***de um arco*** $\overset{\frown}{AM}$ ***é a ordenada*** $\overline{MP}$ ***da extremidade do arco*** (fig. 60).

2) **Co-seno** ***de um arco*** $\overset{\frown}{AM}$ ***é a abscissa*** $\overline{OP}$ ***da exteidade desse arco.***

3) **Tangente** ***de um arco*** $\overset{\frown}{AM}$ ***é a tangente*** AT ***na origem, tomada desde essa origem até a sua intersecção com o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.***

2) O triângulo retângulo OSS' dá:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{OS'}{SS'} = \frac{OS'}{OB} = OS' = BS.$$

Na fórmula (**b**) temos:

$$\text{cotg}\ \alpha = \overline{BS}.$$

Estas fórmulas indicam que o módulo da co-tangente é o mesmo nas duas definições. Porém, nesta segunda, o segmento BS é qualificado; positivo quando orientado para a direita do eixo BB' e negativo quando dirigido para a esquerda desse mesmo eixo.

3) O ponto A é a origem de todas as tangentes, qualquer que seja o arco α; do mesmo modo, o ponto B é origem de todas as co-tangentes.

69. — Secante e co-secante. — Consideremos novamente a figura 59.

a) Secante. — Por definição, secante do arco α, é o vector $\overrightarrow{OT}$ que une o centro do círculo à extremidade da tangente. Temos:

$$\sec \alpha = \overrightarrow{OT}.$$

Este vector é considerado positivo quando passa pela extremidade do arco $\overset{\frown}{AM}$; é negativo quando apenas o seu prolongamento é que passa pela extremidade do arco α.

b) Co-secante. — Por definição, co-secante do arco α é o vector $\overrightarrow{OS}$ que une o centro do círculo com a extremidade da co-tangente. Temos:

$$\text{cosec}\ \alpha = \overrightarrow{OS}.$$

A convenção de sinal da co-tangente é a mesma do que para a tangente.

Observações. — Pelas definições do número 11, teríamos (fig. 59):

$$\sec \alpha = \frac{OT}{OA} = OT;$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OS}{SS'} = \frac{OS}{OB} = OS.$$

Vê-se que são os módulos das funções secante e co-secante como acabam de ser definidas.

70. — Funções circulares de um arco. — As 6 funções circulares são, pelo exposto nos números anteriores, segmentos orientados que dependem, no círculo trigonométrico, do arco *a*.

A figura 60 representa as 6 funções circulares de um arco AM terminado no 1.° quadrante. Adoptando-se o diâmetro $A'A$ como eixo horizontal e o diâmetro $B'B$ como eixo vertical, temos:

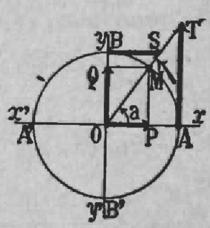

FIG. 60.

1) **Seno** ***de um arco*** $\widehat{AM}$ ***é a ordenada*** $\overline{MP}$ ***da extremidade do arco*** (fig. 60).

2) **Co-seno** ***de um arco*** $\widehat{AM}$ ***é a abscissa*** $\overline{OP}$ ***da exteidade desse arco.***

3) **Tangente** ***de um arco*** $\widehat{AM}$ ***é a tangente*** AT ***na origem, tomada desde essa origem até a sua intersecção com o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.***

4) Co-tangente *do arco* $\widehat{AM}$ *é a tangente traçada por B, tomada desde o ponto B até o prolongamento do raio OM.*

5) *Secante do arco* $\widehat{AM}$ *é o segundo* $\overline{OT}$ *que vai do centro do círculo até a extremidade da tangente.*

6) Co-secante *do arco* $\widehat{AM}$ *é o segmento* $\overline{OS}$ *que vai do centro do círculo até a extremidade da co-tangente.*

71. — Primeiras relações entre as funções circulares. — 1.° Os triângulos semelhantes AOT e OPM (fig. 60) dão:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}}, \text{ ou substituindo: } \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a},$$

porque

$$\overline{AT} = \operatorname{tg} a, \overline{OA} = 1, \overline{MP} = \operatorname{sen} a \text{ e } \overline{OP} = \cos a.$$

Daí a definição: ***A tangente de um arco é a razão do seno para o co-seno desse mesmo arco.***

2.°) Os triângulos semelhantes OSB e OMQ dão:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{OQ}}; \text{ ou substituindo: } \operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a},$$

Daí a definição: ***A co-tangente de um arco é a razão do co-seno para o seno; é o recíproco da tangente.***

3.°) Os triângulos semelhantes OTA e OMP, e depois OSB e OMQ dão:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}; \text{ substituindo temos: } \quad \sec a = \frac{1}{\cos a};$$

e $\dfrac{\overline{OS}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OQ}}$; substituindo temos: co-sec $a = \dfrac{1}{\text{sen } a}$;

porque

$\overline{OT} = \sec a$, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$, $\overline{OP} = \cos a$ e $\overline{OQ} = \text{sen } a$.

Logo: ***a secante de um arco é o recíproco do co-seno e a co-secante é o recíproco do seno.***

72. — Traçar as funções circulares nos 4 quadrantes. — Seja o arco $\overset{\frown}{AM} = a$ terminado sucessiva-

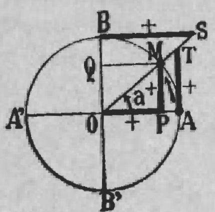

FIG. 61.

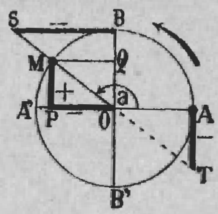

FIG. 62.

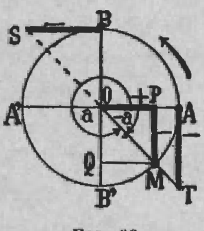

FIG. 63.

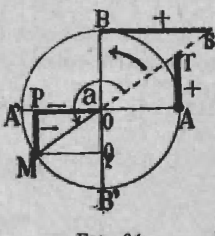

FIG. 64.

mente no 1.º, no 2.º, no 3.º e no 4.º quadrante, temos em cada uma das fig. 61 a 64:

sen $a = \overline{PM} = \overline{OQ}$; tg $a = \overline{AT}$;

cos $a = \overline{OP} = \overline{QM}$; cotg $a = \overline{BS}$.

sec $a = \overline{OT}$; cosec $a = \overline{OS}$.

73. — Sinais das funções circulares. — Para se atribuir um sinal às funções circulares, fazem-se as duas convenções seguintes:

1.°) ***As perpendiculares ao diâmetro AA′ são positivas para cima e negativas para baixo do eixo AA′.***

2.° ***As perpendiculares ao diâmetro BB′ são positivas para a direita e negativas para a esquerda do eixo BB′.***

Ora, as primeiras 4 funções circulares podem considerar-se como segmentos retilíneos perpendiculares a um dos eixos retangulares *AA′* ou *BB′*.

É fácil verificar que o ***seno*** de um arco é positivo quando esse arco termina no 1.° ou no segundo quadrante e é negativo quando o arco termina no 3.° ou no 4.° quadrante (fig. 61 a 62).

O ***co-seno*** é positivo no 1.° ou no 4.° quadrante e negativo no 2.° e no 3.°.

A ***tangente*** e a ***co-tangente*** são poistivas na 1.° e no 3.° quadrante e negativas no 2.° e no 4.°.

Em resumo: no 1.° quadrante ***as 4 linhas trigonométricas são positivas*** (figs. 11, 12 e 13);

no 2.° quadrante, ***são negativas menos o seno;***

no 3.° quadrante, ***são negativas menos a tangente e a co-tangente;***

no 4.° quadrante, ***são negativas menos o co-seno.***

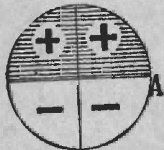

FIG. 65.
Sinais dos senos.

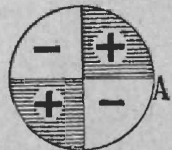

FIG. 66.
Sinais das tg e cotg.

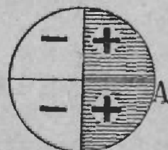

FIG. 67.
Sinais dos cos.

Nota. — A ***secante*** e a ***co-secante***, por serem respectivamente iguais a $\frac{1}{\cos a}$ e a $\frac{1}{\operatorname{sen} a}$, têm necessàriamente o mesmo sinal do que o co-seno e o seno. Assim, a ***secante*** é positiva no 1.° e no 4.° quadrantes e negativa no 2.° e no 3.°.

A ***co-secante*** é positiva no 1.° e no 2.° quadrantes e negativa no 3.° e no 4.°.

Pelo exame das figuras 61, 62, 63 e 64, vê-se que a secante e a co-secante ***são positivas quando passam pela extremidade M do arco considerado e são negativas quando o seu prolongamento passa pela extremidade do arco.***

74. — Razões trigonométricas. — ***As funções circulares ou razões trigonométricas de um ângulo são independentes do raio de círculo adoptado*** e são determinadas quando o ângulo é conhecido.

Seja o ângulo a; tracemos os arcos MA e $M'A'$ e as perpendiculares MP e $M'P'$: os triângulos semelhantes OMP e $OM'P'$ dão (fig. 68):

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MO}} = \frac{\overline{M'P'}}{\overline{OM'}};$$

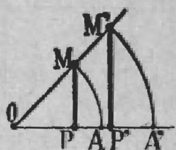

FIG. 68.

temos ainda:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{M'P'}}{\overline{OM'}};$$

logo, seja qual for o raio OM ou OM' o seno de a é sempre igual à razão $\frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}$.

De modo idêntico as outras razões trigonométricas são independentes do raio.

75. — Redução ao primeiro quadrante. — Quando o arco varia de 0° até 360°, as 6 funções trigonométricas irão repetir-se, em valor absoluto, nos arcos superiores a 90°. Em outros termos:

Dado um arco que termina no 2.°, no 3.°, ou no 4.° quadrante, existe um arco, e sòmente um, no 1.° quadrante, que tem, em valor absoluto, as mesmas linhas trigonométricas.

Reduzir um arco ao primeiro quadrante é o problema que tem por fim calcular o arco do primeiro quadrante para o qual as 6 funções trigonométricas são as mesmas do que para o arco dado, salvo o sinal. O sinal das funções, no arco dado, deduzem-se das leis já mencionadas no número 73. Se o arco for maior do que 360°, determina-se o quadrante em que termina pelo processo indicado no número 48.

76. — Retângulo inscrito no círculo trigonométrico. — No círculo trigonométrico inscrevamos um retângulo $MM'NN'$ de lados paralelos aos diâmetros retangulares AA' e BB' (fig. 69).

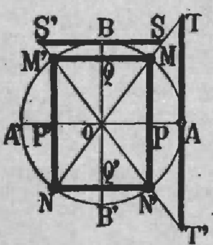

FIG. 69.

Esse retângulo determina os 4 arcos AM, AM', AN e AN' cujas funções trigonométricas são iguais em valor absoluto, porque a simetria dá logo, fazendo-se abstração dos sinais:

1.° *para os senos:* $MP = M'P' = NP' = N'P$.
2.° *para os co-senos:* $MQ = M'Q = NQ' = N'Q'$;
3.° *para as tangentes:* $AT = AT'$;
4.° *para as co-tangentes:* $BS = BS'$.

77. — Arcos que diferem de uma ou de várias circunferências. — Dois arcos da mesma origem A, que diferem de uma ou várias circunferências completas (arcos *côngruos*), terminam no mesmo ponto; logo, têm funções circulares idênticas, de mesmo módulo e mesmo sinal.

Seja a um desses arcos e k um número inteiro qualquer, teremos:

$$\text{sen } (2k\pi+a) = \text{sen } a; \qquad \text{tg } (2k\pi+a) = \text{cotg } a;$$
$$\cos (2k\pi+a) = \cos a; \qquad \text{cotg } (2k\pi+a) = \text{cotg } a.$$

Logo, ***dois arcos que diferem de uma ou de várias circunferências completas têm funções circulares de mesmos valores absolutos afetados com os mesmos sinais.***

78. — Arcos suplementares. — Dois arcos suplementares $\widehat{AM} = a$ e $\widehat{AM} = \pi - a$ (fig. 69), têm as extremidades M e M' simétricas em relação ao diâmetro BB'; logo, suas funções circulares são iguais em valor absoluto e de sinais contrários, exceto os senos MP e $M'P'$ que têm mesmo sinal. Portanto temos:

$$\text{sen } (\pi - a) = \text{sen } a; \qquad \text{tg } (\pi - a) = -\text{tg } a;$$
$$\cos (\pi - a) = -\cos a; \qquad \text{cotg } (\pi - a) = -\text{cotg } a.$$

Logo, ***dois arcos suplementares têm funções circulares iguais em valores absolutos e de sinais contrários, exceto os senos, que têm mesmo sinal.***

É de uso frequente lembrar que: ***dois arcos suplementares têm senos iguais e de mesmo sinal e co-senos iguais e de sinais contrários.***

75. — Arcos que diferem de meia-circunferência. — Dois arcos $\widehat{AM} = a$ e $\widehat{AN} = \pi + a$ (fig. 69) que diferem de uma semi-circunferência, terminam nas extremidades M e N de um mesmo diâmetro MN; suas funções circulares são iguais e de sinais contrários, exceto a tangente AT

e a co-tangente BS, que se confundem e são iguais e de mesmo sinal. Portanto:

$$\text{sen}\ (\pi+a) = -\text{sen}\ a; \qquad \text{tg}\ (\pi+a) = \text{tg}\ a;$$
$$\cos\ (\pi+a) = -\cos\ a; \qquad \text{cotg}\ (\pi+a) = \text{cotg}\ a.$$

Logo, ***dois arcos que diferem de uma semi-circunferência têm funções circulares iguais em valores absolutos e de sinais contrários, exceto a tangente e a co-tangente que têm mesmo sinal.***

O mesmo se dá ***quando os arcos diferem de um número ímpar de semi-circunferências.***

80. — Arcos iguais e de sinais contrários. — Dois arcos iguais de sinais contrários $AM = a$ e $AN' = -a$ (fig. 69) terminam nos pontos M e N' simétricos em relação ao diâmetro AA'; têm funções circulares iguais em valores absolutos e de sinais contrários, exceto os co-senos OP que são idênticos.

Temos:

$$\text{sen}\ (-a) = -\text{sen}\ a; \qquad \text{tg}\ (-a) = -\text{tg}\ a;$$
$$\cos\ (-a) = \cos\ a; \qquad \text{cotg}\ (-a) = -\text{cotg}\ a.$$

Logo, ***dois arcos iguais e de sinais contrários têm funções circulares iguais em valores absolutos e de sinais contrários, exceto os co-senos que têm mesmo sinal.***

81. — Arcos complementares. — ***Quando dois arcos são complementares, como*** a ***e*** $\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$, ***o seno, a tangente e a secante de um são iguais respectivamente ao co-seno, à co-tangente e à co-secante do outro.***

Na figura 69 pode-se notar que o co-seno, a co-tangente e a co-secante de um arco AM são respectivamente o seno, a tangente e a secante do arco complementar, BM.

Temos:

$$\cos AM = \operatorname{sen} BM \quad \text{ou} \quad \cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right);$$

$$\operatorname{cotg} AM = \operatorname{tg} BM \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right);$$

$$\operatorname{cosec} AM = \sec BM \quad \text{ou} \quad \operatorname{cosec} a = \sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right).$$

82. — Arcos que diferem de $\frac{\pi}{2}$. — Sejam os arcos a e $\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ que diferem de $\frac{\pi}{2}$ ou $90°$; para se calcular as relações entre suas funções circulares basta notar que os arcos $\frac{\pi}{2} + a$ e $-a$ são complementares e temos logo (n.° 81) (fig. 70):

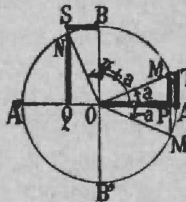

FIG. 70.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= \cos(-a) = \cos a, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a, \\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

83. — Reduzir um arco ao 1.° quadrante. — Conforme se acaba de ver, dado um arco no 2.°, 3.° ou 4.° quadrante, existe sempre no 1.° quadrante um arco e um só que tenha as mesmas funções circulares, abstração feita dos sinais.

É sempre possível determinar esse arco; eis o modo de proceder:

1.º Se o arco dado a exceder 360º, é preciso dividi-lo por 360 e vem o quociente inteiro q e o resto r.

O quociente q mostra quantas circunferências inteiras existem no arco a; o resto r indica o quadrante onde o arco termina e, portanto, que sinais têm as suas funções circulares.

Se $r<90°$, esse resto r é o arco procurado e suas funções circulares são iguais às do arco a e têm mesmo sinal (n.º 77).

2.º ***Se $90°<r<180°$, r pertence ao 2.º quadrante e deve ser subtraido de*** 180º; a diferença $180°—r$ é o arco procurado; suas funções circulares são iguais às do arco a, com sinais contrários exceto o seno (n.º 78).

3.º ***se $180°<r<270°$, r pertence ao 3.º quadrante e deve-se tirar-lhe*** 180º; a diferença $r—180°$ é o arco procurado; suas funções circulares são iguais às do arco a, com sinais contrários, exceto a tangente e a co-tangente (n.º 79).

4.º ***Se $270°<r<360°$, r pertence ao 4.º quadrante e deve ser subtraido de*** 360º; a diferença $360°—r$ é o arco procurado; suas funções circulares são iguais às do arco a e de sinais contrários, exceto o co-seno (n.º 80).

84. — Exercícios resolvidos. — 1. — ***Reduzir ao primeiro quadrante o arco de*** 970º.

Dividindo 970 por 360, obtemos:

$$970° = 2 \times 360° + 250°.$$

O arco dado termina, pois, no ***3.º quadrante***; as funções trigonométricas desse arco do 3.º quadrante são as mesmas, em valor absoluto, que as do arco de:

$$250° - 180° = 70°.$$

E temos (n.º 83):

$$
\begin{aligned}
\text{sen } 970^\circ &= \text{sen } 250^\circ = -\text{sen } 70^\circ;\\
\cos 970^\circ &= \cos 250^\circ = -\cos 70^\circ;\\
\text{tg } 970^\circ &= \text{tg } 250^\circ = \text{tg } 70^\circ;\\
\text{cotg } 970^\circ &= \text{cotg } 250^\circ = \text{cotg } 70^\circ;\\
\sec 970^\circ &= \sec 250^\circ = -\sec 70^\circ;\\
\text{cosec } 970^\circ &= \text{cosec } 250^\circ = -\text{cosec } 70^\circ.
\end{aligned}
$$

II. — ***Um ponto** M **percorre o círculo** O **em 2 seg. com movimento uniforme*** (fig. 71). ***Calcular a posição da sua projeção** P**, sobre um diâmetro que passa pela origem dos arcos** A**, 2/3 de segundo depois da sua passagem pelo ponto** A.*

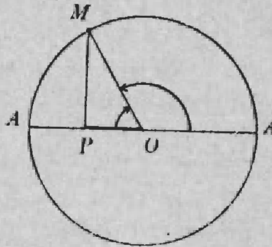

FIG. 71.

O móvel percorre por segundo um arco de $\frac{360^\circ}{2}$; é esta a sua ***velocidade angular.*** Em 2/3 de segundo terá percorrido o arco $\widehat{AM}$ de:

$$\frac{360}{2} \times \frac{2}{3} = 120^\circ.$$

No triângulo retângulo OMP, o ângulo agudo POM iguala $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, e temos:

$$OP = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}.$$

Num círculo de raio R, teremos: $OP = \frac{R}{2}$.

Em relação à origem O do eixo $A'A$, a elongação do ponto P é, no momento dado: $-\frac{R}{2}$.

III. — ***Um móvel** M**, percorre um círculo com velocidade uniforme representada por um vector** $\overrightarrow{V}$**, tangente ao círculo e ligado ao ponto** M**. Calcular a velocidade com que o ponto se desloca em relação a cada uma das direções** NS **e** EW **no momento em que o seu azimute é de** 215° **em relação a um observador situado em** O.* (fig. 72). Aplicação para $V = 40$ cm/seg.

As projeções do vector $\overrightarrow{MV}$ sobre as direções EW e NS são, respectivamente os vectores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ que representam as velocidades componentes do ponto M segundo essas direções.

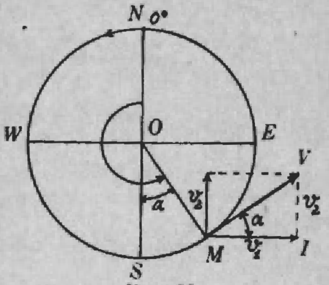

Fig. 72.

Os ângulos em α são iguais por terem lados respectivamente perpendiculares e temos:

$$\alpha = 215° - 180° = 35°.$$

O triângulo retângulo IMV, nos dá (n.º 28):

$$v = V \cos 35° = 40 \times 0{,}8192 = 32{,}77 \text{ cm/seg.}$$

$$v_2 = V \operatorname{sen} 35° = 40 \times 0{,}5736 = 22{,}94 \text{ cm/seg.}$$

As velocidades componentes nas direções indicadas são, pois:

32,77 cm/seg no sentido Oeste→Leste.
22,94 cm/seg no sentido Sul→Norte.

EXERCÍCIOS ORAIS

1. — Em que quadrantes estão localizados os seguintes pontos, dados pelas suas coordenadas:

$$A(2, -5);\quad B(-1, -7);\quad C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);\quad D(-\sqrt{3}, \sqrt{2}).$$

2. — Definir o ***seno*** e o ***co-seno*** de um arco como projeções de vectores.

3. — Dar o sinal de cada uma das funções seguintes nos casos indicados:

a) $\cos \theta$, θ no 3.º quadrante; *c*) $\sec \theta$, θ no 4.º quadrante;
b) $\operatorname{tg} \theta$, θ no 2.º quadrante; *d*) $\operatorname{sen} \theta$, θ no 2.º quadrante.

5. — Dizer o quadrante em que terminam os arcos em cada um dos casos seguintes:

a) $\operatorname{sen} \alpha$ é $(+)$ e $\operatorname{tg} \alpha$ é $(-)$; *c*) $\operatorname{cosec} \alpha$ é $(+)$ e $\sec \alpha$ é $(-)$;
b) $\operatorname{tg} \alpha$ é $(+)$ e $\cos \alpha$ é $(-)$; *d*) $\operatorname{sen} \alpha$ é $(+)$ e cosec é $(+)$.

6. — Quais são as funções trigonométricas que crescem com o arco de 0° até 90°?

7. — Quais são as funções que decrescem quando o arco varia de 0° até 90°?

8. — Que diferença há entre o seno definido como razão trigonométrica (n.° 11) e o seno definido como função circular (n.° 67)?

9. — De 0° até 180°, quais são as funções trigonométricas que têm mesmo valor do que:

a) sen 30°; *c*) tg 45°;
b) cos 20°; *d*) sec 60°?

10. — Dizer se as seguintes proposições estão certas, erradas ou se não têm a devida concisão, e por quê?

a) sen 60° = sen 420° = sen — 300°.

b) Se sec α é (+), também sen α é (+).

c) Se tg $\alpha = 3$, a extremidade da tangente tem como coordenadas o ponto T (1,3).

d) O círculo trigonométrico é aquele que tem como raio a unidade de comprimento.

e) As funções trigonométricas são representadas geomètricamente por meio de segmentos orientados.

f) No círculo trigonométrico, o sentido positivo do arco é aquele que se efetua no sentido contrário dos ponteiros de um relógio.

g) Se sen 90° = 1, o sen 45° é igual a ½.

h) A co-secante de um arco tem sempre o mesmo sinal do que o seno desse mesmo arco.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39. — Dá-se um círculo de 30 mm de raio traçado com centro na origem de um sistema de coordenadas retangulares. Calcular, por meio das razões trigonométricas, as coordenadas dos pontos do círculo situado nas extremidades dos arcos seguintes, medidos desde o ponto de intersecção do círculo com o semi-eixo positivo das abscissas:

ponto M a 10°; ponto N a 100°; ponto P a 200°; ponto Q a 300°.

40. — Representar gràficamente, com toda a precisão possível, as funções trigonométricas do arco de 120° num círculo de 30 mm

de raio. Dimensionar os segmentos trigonométricos com aproximação de milímetro e calcular aproximadamente o valor das funções trigonométricas desse arco.

41. — Dizer qual é o sinal das funções trigonométricas nos casos seguintes:

a) sen α, α no 1.º quadrante;
b) tg α, α no 2.º quadrante;
c) sec α, α no 3.º quadrante;
d) cos α, α no 4.º quadrante;
e) cotg α, α no 2.º quadrante;
f) cosec α, α no 3.º quadrante.

42. — Determinar, entre 0º e 360º, os arcos para os quais temos:

a) $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *b*) $\text{tg}\ \beta = \sqrt{3}$.

43. — Sabendo que $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; traçar os outros segmentos trigonométricos e calcular, aproximadamente, as outras funções trigonométricas do ângulo α.

44. — Dado sen $A = \cos 23°$, achar dois arcos positivos e dois arcos negativos que satisfaçam à relação dada.

45. — Reduzir ao primeiro quadrante os arcos seguintes:

$$115°, \quad 210°, \quad 290°, \quad 1655°, \quad \frac{17\pi}{10}.$$

46. — Que relação existe entre as funções trigonométricas dos arcos seguintes:

a) $35°$ e $180° - 35°$?
b) $22°$ e $90° - 22°$?
c) $15°$ e $90° + 15°$?
d) a e $a - \frac{\pi}{2}$?

47. — Um móvel M percorre um círculo O de raio $R = 3$ m em 12 segundos. Calcular a distância entre o centro do círculo e a projeção do ponto M sobre o diâmetro que passa pela origem do movimento ($t = 0$), 7 segundos depois da saída.

UNIDADE VII

VARIAÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

85. — Funções trigonométricas. — **a)** Como as funções algébricas de duas variáveis, as funções trigonométricas apresentam-se com uma ***variável independente:*** é o arco x, que pode variar de 0 até 2π radianos passando por todos os valores intermediários e continuar ***indefinidamente*** mediante rotações sucessivas do raio vector OM. Indicamos este fato dizendo que x varia de modo contínuo de 0 até $+\infty$.

Do mesmo modo, o arco pode variar de 0 até $-\infty$, desde que a rotação do raio vector se efetue no sentido negativo.

O arco x é, pois, a variável independente e o seu intervalo de variação extende-se a todo os arcos representados por um ***número real*** de $-\infty$ até $+\infty$.

A representação geométrica destes arcos é feita, em ***coordenadas cartesianas,*** pelo eixo das ***abscissas.*** A unidade de arco, neste eixo, é o ***radiano,*** ou segmento do eixo igual ao raio do círculo considerado.

b) Os segmentos orientados que dependem deste arco, constituem a segunda variável, ***variável dependente,*** ou ***função da variável independente.***

Estas funções trigonométricas são representadas pelos seis símbolos:

sen, cos, tg, cotg, sec e ***cosec.***

A sua ***relação de dependência*** mútua com a variável independente x, exprime-se pelos símbolos:

sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cosec x,

também resumida no único símbolo y.

Assim, podemos escrever:

$$y = \text{sen } x$$

isto é: y é igual à função ***seno*** para determinado arco x.

A cada valor atribuído a x corresponde um valor numérico para o seno ou y.

Os valores da variável dependente y são representados geomètricamente pelo eixo das ***ordenadas*** traçado perpendicularmente ao eixo das abscissas. A intersecção dos dois eixos é a origem das ***coordenadas.***

A unidade, no eixo y é a mesma do que no eixo de abscissas; é o ***radiano*** ou raio do círculo sobre o qual se opera.

86. — Preparação dos eixos de coordenadas. — Seja, fig. 73, um círculo de raio $O'A$. O diâmetro $O'A$, prolongado indefinidamente serve de eixo das abscissas.

Tomemos o ponto A como origem; será chamado, daqui em diante, O, quando nos referirmos à ***representação gráfica das funções trigonométricas.***

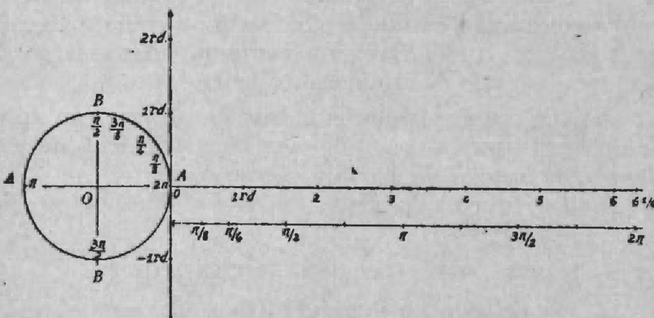

FIG. 73.

Sobre este eixo transportamos o raio e fica assim dividido em radianos.

Costuma-se, no entanto, representar os radianos em função de π. A circunferência toda corresponde a 2π radianos ou:

$$2 \times 3{,}14 = 6{,}28 \text{ radianos;}$$

aproximadamente, $6\frac{1}{4}$ radianos ou raios.

Sobre o eixo dos π transportamos, pois, $6\frac{1}{4}$ raios e marcamos o ponto 2π, correspondente a um arco igual a uma volta inteira do círculo considerado. Dividimos, depois, este segmento pelo meio, de modo a obter: π, correspondente ao ponto A': $\frac{3\pi}{4}$, correspondente ao ponto B'; $\frac{\pi}{2}$, correspondente ao ponto B; $\frac{\pi}{4}$, correspondente ao meio do arco AB ou $45°$; etc.

O eixo de ordenadas será apenas dividido em raios, a partir da origem.

87. — Variações da função seno. — Consideremos um ponto móvel M que marca a extremidade do arco variável.

O móvel M parte de A, descreve arcos no sentido positivo e percorre os 4 quadrantes; x cresce assim de $0°$ até $360°$.

No 1.° quadrante, o seno ou y cresce de 0 até $+1$, de modo contínuo, tomando todos os valores intermediários; o móvel vai de A até B sobre o círculo;

no 2.° quadrante, o seno ou y decresce de $+1$ a 0, de modo contínuo, tomando, em ordem inversa, todos os valores precedentes; o móvel M vai de B até A' sobre o círculo;

no 3.° quadrante, o seno ou y torna-se negativo e decresce, de modo contínuo, de 0 até —1; o móvel vai de A' até B' sobre o círculo;

no 4.° quadrante, o seno ou y permanece negativo e cresce, de modo contínuo, de —1 até 0; o móvel vai de B' até A sobre o círculo.

Para 2 posições do móvel M simétricas em relação ao diâmetro BB', o seno tem 2 valores iguais e de mesmo sinal; para 2 posições simétricas em relação ao eixo AA', o seno tem 2 valores iguais em valor absoluto e de sinais contrários.

A cada volta do ponto M, o seno: 1.° anula-se e muda de sinal 2 vezes: em A e em A'; — 2.° toma um valor ***máximo,*** 1, em B, e um valor ***mínimo,*** —1, em B'; — 3.° toma 2 vezes cada um dos valores compreendidos entre -1 e $+1$.

Acrescentando-se ao arco x uma ou mais vezes 2π, o valor numérico do seno não se altera, e temos:

$$\operatorname{sen}(2k\pi + x) = \operatorname{sen} x;$$

logo, sen x ***é uma função periódica do arco*** x ***e o período é*** 2π.

Uma função é ***periódica*** se o seu valor numérico não se altera quando se acrescenta, à sua variável independente, certa quantidade (***período***) ou qualquer múltiplo dessa quantidade.

No caso do seno o período é 2π.

88. — Gráfico do seno. — Sobre dois eixos retangulares Ox e Oy, divididos em radianos (n.° 86), levemos os arcos x como abscissas e os senos correspondentes como ordenadas (fig. 74).

Por exemplo, o arco $\overset{\frown}{OM}$ dá a abscissa Om e seu seno MP dá a ordenada correspondente ao ponto V do gráfico.

Se o móvel M percorrer a circunferência a abscissa do ponto V acompanhará o eixo Ox e passará por $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π radianos; o ponto V dará uma sucessão

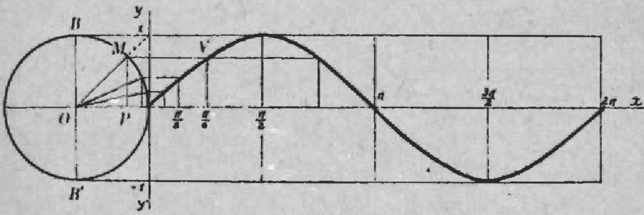

FIG. 74.

contínua de pontos cuja reunião formará a curva ou ***gráfico das variações do seno.***

Essa curva: 1.º corta o eixo Ox numa infinidade de pontos cujas abscissas são $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\ldots, k\pi$; — 2.º prolonga-se indefinidamente à direita e à esquerda da origem; — 3.º faz com a direção positiva do eixo dos x um ângulo de 45° nos pontos $0, 2\pi, 4\pi, \ldots 2k\pi$ e um ângulo de 135° com essa mesma direção nos pontos $\pi, 3\pi, \ldots (2k+1)\pi$; 4.º, passa alternadamente por ***máximos***$(+1)$ e por ***mínimos***(-1).

Essa curva leva o nome de ***senóide,*** e encontra-se inúmeras vezes nos diagramas dos movimentos periódicos, em física.

89. — Variações do co-seno. — Seja a função $y = \cos x$ e demos a x todos os valores desde 0 até 2π, teremos os resultados seguintes:

No 1.º quadrante, o co-seno OP (fig. 74) começa por 1 e decresce de modo contínuo até 0, tomando todos os valores entre 1 e 0 (fig. 75);

no 2.° quadrante, o co-seno continua a decrescer de 0 até —1;

no 3.° quadrante, cresce de —1 até 0

e *no 4.° quadrante*, cresce ainda de 0 até +1.

Para 2 posições de M simétricas em relação ao eixo AA', o co-seno toma valores iguais e de mesmo sinal; para 2 posições simétricas em relação ao eixo BB', toma valores iguais e de sinais contrários.

A cada volta do ponto M, o co-seno: 1.° anula-se e muda de sinal duas vezes: em B e em B'; — 2.° toma um valor ***máximo***, 1, em A e um valor ***mínimo***, — 1, em A'; — 3.° toma duas vezes cada um dos valores intermediários entre 1 e — 1.

Acrescentando-se ao arco x uma ou mais vezes 2π, o co-seno não muda e temos:

$$\cos(2k\pi+x) = \cos x;$$

logo, cos x ***é uma função periódica de x e o período é 2π.***

90. — Gráfico do co-seno. — Como para o seno, sobre 2 eixos retangulares Ox e Oy, levemos como abscissas os comprimentos dos arcos e como ordenadas os valores correspondentes do co-seno, teremos uma sucessão contínua de pontos cuja reunião dá uma curva representando as variações do co-seno; é a ***cossenóide.***

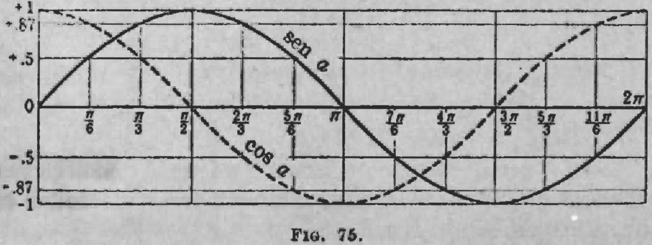

FIG. 75.

Na figura 75, as variações do co-seno foram representadas conjuntamente com as variações do seno. As duas curvas são análogas.

Nota. — Amplitude e período. — Uma das propriedades mais notáveis das funções circulares é a sua *periodicidade*. E' assim que o seno passa sucessivamente pelos valores 0, 1, 0, —1, 0, quando o arco varia de 0 até 2π. Os mesmos valores se repetem quando o arco varia de 2π até 4π, de 4π até 6π, etc. Este intervalo da variável independente, depois do qual a função torna a passar pelos mesmos valores e na mesma ordem, é chamado ***período.*** Na figura 75-bis vêm representados 3 períodos das funções seno e co-seno. A ***amplitude*** é caracterizada pelo fato de serem as funções seno e co-seno limitadas no intervalo de variação compreendido entre 1 e — 1, isto é, entre 1 raio e —1 raio do círculo trigonométrico.

Diz-se que a sua ***amplitude total*** é 2.

Veremos mais adiante (n.º 96) alguns exemplos de variação do período e da amplitude nos gráficos do seno ou do co-seno.

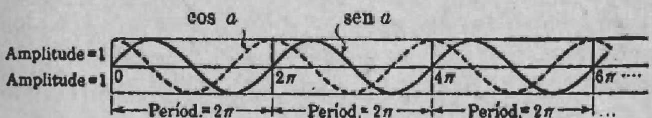

FIG. 75-*bis*.

91. — Variações da tangente. — Seja a função $y = \operatorname{tg} x$; façamos variar o arco x de 0 até 2π (fig. 76).

Quando o ponto M percorre o 1.º quadrante, de A até B, a tangente começa por 0 e cresce de modo contínuo acima de qualquer limite positivo; tende para $+\infty$ que alcança quando chega a B.

Quando o ponto M percorre o 2.º quadrante, de B até A', a tangente é negativa, parte de $-\infty$ e chega a 0, retomando os mesmos valores absolutos, em sentido inverso.

Quando o arco tende para $\frac{\pi}{2}$ por valores inferiores a $\frac{\pi}{2}$, a tangente tende para $+\infty$; quando o arco tende para $\frac{\pi}{2}$ por valores superiores a $\frac{\pi}{2}$, a tangente tende para $-\infty$.

Logo, a tangente é descontínua, passa repentinamente de $+\infty$ para $-\infty$ quando o arco passa por $\frac{\pi}{2}$.

No 3.º quadrante, a tangente passa novamente pelos valores do 1.º quadrante e cresce de 0 até $+\infty$.

No 4.º quadrante, retoma os valores do 2.º e cresce de $-\infty$ até 0.

Para os dois arcos terminados em pontos simétricos em relação aos eixos AA' ou BB', a tangente tem valores simétricos, isto é, iguais em valor absoluto e de sinais contrários.

Para dois arcos terminados em pontos simétricos em relação ao centro O, a tangente tem valores iguais.

A tangente é uma função do arco, sempre crescente com esse arco, exceto para $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, em que é descontínua, passando repentinamente de $+\infty$ para $-\infty$.

A cada volta do ponto M, a tangente passa 2 vezes por todos os valores, isto é, iguais em valor absoluto e de sinais contrários, desde $-\infty$ até $+\infty$.

A tangente do arco x não muda quando se acrescenta a esse arco um número completo de semi-circunferências ou $k\pi$, porque temos:

$$\operatorname{tg}(x+k\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Logo, a tangente é uma função periódica do arco e o período é π.

A curva representativa é a ***tangentóide*** (fig. 76).

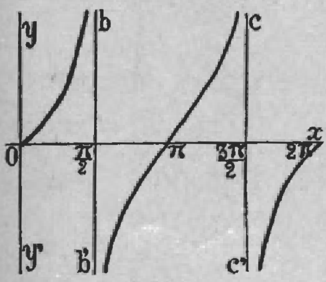

Fig. 76.

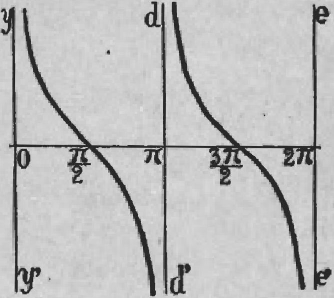

Fig. 77.

92. — Variações da co-tangente. — No 1.° ***quadrante***, a co-tangente começa por $+\infty$ e decresce até 0 (fig. 77).

No 2.° ***quadrante***, decresce de 0 até $-\infty$.

No 3.° ***quadrante***, retoma os valores do 1.° e decresce de $+\infty$ até 0.

No 4.° ***quadrante***, repetem-se os valores do 2.° quadrante; a co-tangente decresce de 0 até $-\infty$.

Para 2 arcos terminados em pontos simétricos em relação aos eixos AA' ou BB', a co-tangente toma valores simétricos; para 2 arcos terminados em pontos simétricos em relação ao centro O, a co-tangente toma valores iguais; é descontínua nos pontos A e A' onde passa repentinamente de $-\infty$ para $+\infty$.

A cada semi-circunferência ABA' ou $A'B'A$, a co-tangente retoma todos os valores decrscentes, desde $+\infty$ até $-\infty$.

A co-tangente é uma função periódica do arco e o período é π; temos:

$$\text{cotg}\,(x+k\pi) = \text{cotg}\,x.$$

93. — Variações da secante e da co-secante. — 1.° Seja a função $y = \sec x$; como a secante é o recíproco do coseno (n.° 71, 3.°), temos:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

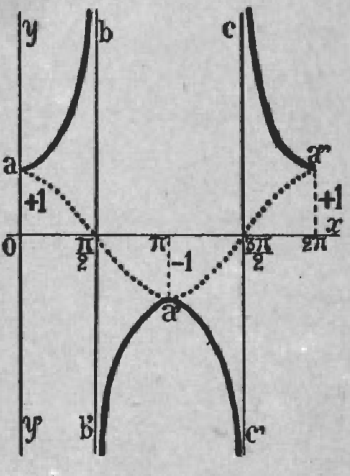

FIG. 78.

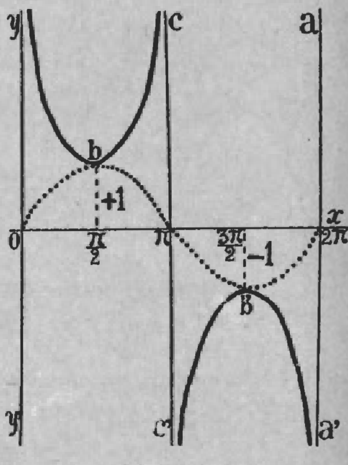

FIG. 79.

No 1.° quadrante, a secante é positiva e cresce de 1 até $+\infty$ (fig. 78).

No 2.° quadrante, é negativa e cresce de $-\infty$ até -1.

No 3.° quadrante, é negativa e decresce de -1 até $-\infty$.

No 4.° quadrante, é positiva e decresce de $+\infty$ até 1.

Tem valores iguais para 2 arcos terminados em pontos simétricos em relação ao eixo AA'; tem um mínimo, $+1$, no ponto A ou $2k\pi$ e um máximo, -1, no ponto A', ou $(2k+1)\pi$; é descontínua nos pontos B e B'; passa de $+\infty$ para $-\infty$ em B e de $-\infty$ para $+\infty$ em B'.

O gráfico desta função é dado pela fig. 78.

2.° Seja a função $y = \mathbf{cosec}\ x$.

Como a co-secante é o recíproco do seno, temos (n.° 71, 3.°):

$$y = \text{cosec}\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}.$$

No 1.° quadrante, a co-secante é positiva e decresce de $+\infty$ até 1 (fig. 79).

No 2.° quadrante, é positiva e cresce de 1 até $+\infty$.
No 3.° quadrante, é negativa e cresce de $-\infty$ até -1.
No 4.° quadrante, é negativa e decresce de -1 até $-\infty$.

É descontínua nos pontos A e A', mínima em B, máxima em B', toma valores iguais para dois arcos terminados em 2 pontos simétricos em relação ao eixo BB'.

O seu gráfico é dado pela fig. 79.

Temos: $\sec(x+2k\pi) = \sec x$ e $\text{cosec}(x+2k\pi) = \text{cosec}\ x$; logo, ***a secante e a co-secante são funções periódicas do arco e o seu período é*** 2π.

94. — Quadro recapitulativo e conclusão. — O quadro seguinte resume as variações das 6 funções circulares:

Arco x	0°	cresce	$\frac{\pi}{2}$	cresce	π	cresce	$\frac{3\pi}{2}$	cresce	2π	Período
Sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	2π
Cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1	2π
Tg x	0	cresce	$\pm\infty$	cresce	0	cresce	$\pm\infty$	cresce	0	π
Cotg x	∞	decresce	0	decresce	$\mp\infty$	decresce	0	decresce	$\mp\infty$	π
Sec x	1	cresce	$\pm\infty$	cresce	-1	decresce	$\mp\infty$	decresce	1	2π
Cosec x	∞	decresce	1	cresce	$\pm\infty$	cresce	-1	decresce	$\mp\infty$	2π

Pode-se concluir o que segue:

1.° ***Qualquer número positivo ou negativo pode representar uma tangente ou uma co-tangente.***

2.° ***Apenas os números compreendidos entre*** 1 ***e*** —1 ***podem representar um seno ou um co-seno.***

3.° ***Apenas os números inferiores a*** —1 ***ou superiores a*** +1 ***podem representar uma secante ou uma co-secante.***

4.° ***Os números*** 1 ***e*** —1 ***são os únicos que podem representar qualquer função circular.***

95. — Gráfico conjunto das funções trigonométricas. — A figura 80 representa, num mesmo gráfico as variações das funções trigonométricas. Este gráfico merece exame demorado e havemos de nos referir a ele em vários pontos do livro principalmente no caso da resolução das ***equações trigonométricas.***

Quando duas curvas deste gráfico têm um ponto comum, isto significa que as duas funções trigonométricas

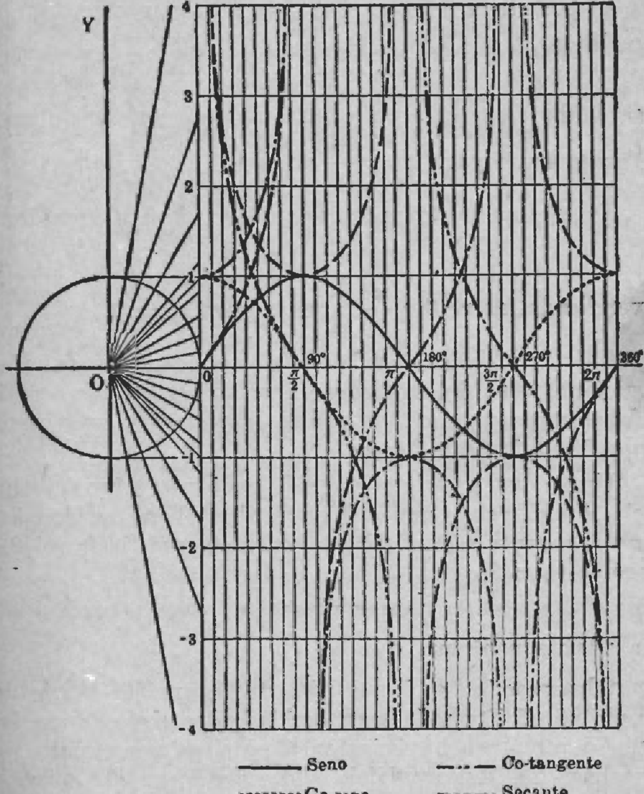

FIG. 80.

representadas por esses gráficos são iguais para o arco que corresponde ao ponto comum.

Assim, a senóide (traço cheio) intercepta a co-senóide (traço pontilhado) entre 0 e $\frac{\pi}{2}$; isto quer dizer que a igualdade

$$\operatorname{sen} x = \cos x$$

é satisfeita neste intervalo para um único valor do arco x; exatamente para $x = \frac{\pi}{4}$ ou 45°.

Do mesmo modo podemos verificar que a igualdade

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$$

é verificada, entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, apenas para $x = 0$.

Tais igualdades condicionais, que encerram funções trigonométricas de arcos desconhecidos e que são verificadas apenas para certos valores do arco x, constituem *equações trigonométricas*.

Uma equação trigonométrica pode não admitir solução. Assim vemos no gráfico conjunto que as funções *seno* e *secante* não admitem ponto comum de 0 até 2π. Logo, a equação

$$\operatorname{sen} x = \sec x$$

não admite nenhuma solução.

Observação. — No gráfico da figura 80, o raio do círculo não foi tomado como unidade dos eixos de abscissas. Adoptou-se arbitràriamente certo segmento para representar 2π. Este artifício é de uso frequente quando não se dispõe de espaço suficiente para um desenvolvimento completo do círculo ou quando se quer pôr em maior relevo a amplitude de variação das funções representadas.

96. — Mudança de amplitude e de período. — 1) Seja a função

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Se multiplicarmos sen x por um número qualquer, a ordenada do gráfico será multiplicada por esse mesmo número; as abscissas, porém, ficarão as mesmas. Assim, nas funções:

$$2 \text{ sen } x, \quad 3 \text{ sen } x, \quad \frac{1}{2} \text{ sen } x,$$

as ordenadas são multiplicadas respectivamente por 2, 3 e $\frac{1}{2}$. Os máximos correspondentes a estas três funções serão respectivamente 2, 3 e $\frac{1}{2}$, em relação ao máximo 1, da função $y = \text{sen } x$ (fig. 81). O mesmo se dá com a função $y = \cos x$.

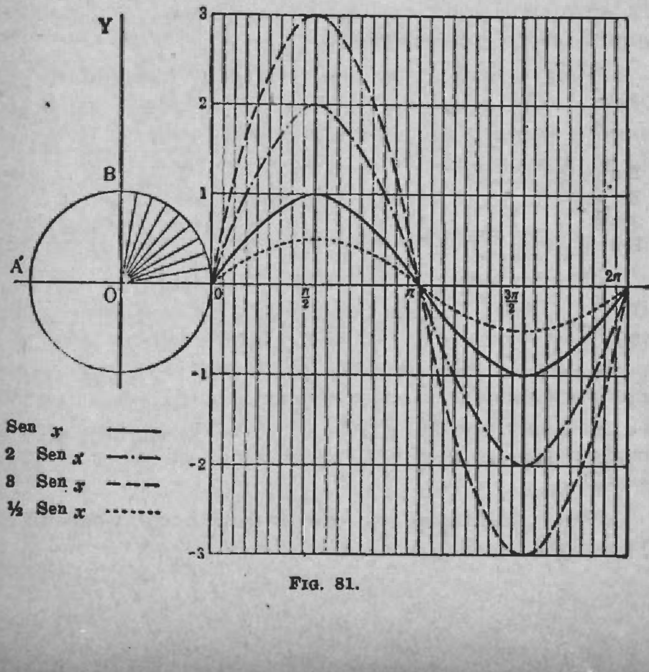

FIG. 81.

2) Pelo contrário, se multiplicarmos o arco x por um factor qualquer, dividiremos o período por esse número. Assim, as funções:

$$\text{sen } x, \quad \text{sen } 2x, \quad \text{sen } 3x, \quad \text{sen } \frac{1}{2} x,$$

têm como períodos respectivos: 2π, π, $\frac{2\pi}{3}$ e 4π.

A figura 82 dá o gráfico conjunto dessas 4 funções.

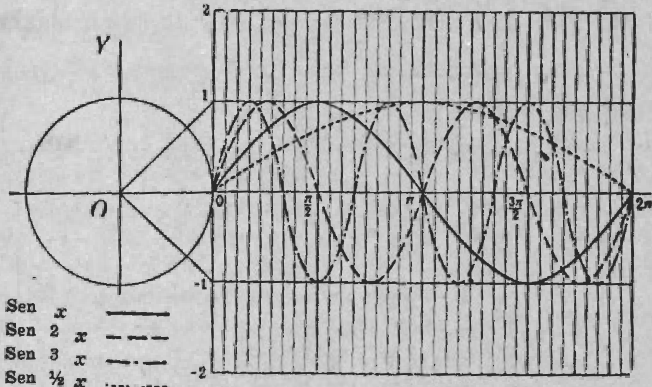

FIG. 82.

EXERCÍCIOS ORAIS

97. — **1.** — Pelo exame do gráfico 80, achar a resposta às perguntas seguintes: (considerar apenas arcos de 0° até 360°).

(*a*) Qual é a função trigonométrica que é sempre ***crescente?*** — sempre ***decrescente?***

(*b*) Qual é, de 0° até 180°, o arco α para o qual:

1) $\text{sen } \alpha = 1$? 3) $\text{tg } \alpha = 0$?

2) $\sec \alpha = 1$? 4) $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{2}$?

(c) Quais são os ângulos que satisfazem a cada uma das seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$. c) $\operatorname{sen} \theta = \sec \theta$.
b) $\cos \theta = \sec \theta$. d) $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{cotg} \theta$?

(d) Quais são, aproximadamente, os arcos que satisfazem à equação $\operatorname{tg} \alpha = 3$. No gráfico 80, observar que o eixo das abscissas tem divisões que representam arcos iguais a $\frac{\pi}{18}$.

(e) No gráfico da fig. 80 acrescentar a lápis o gráfico da função $y = -\operatorname{sen} x$.

2. — Pelo exame do gráfico 81, achar a resposta às questões seguintes:

(a) Para que valor do arco x se verifica a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$?

(b) De 0 até 2π, quantas raízes admite a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$?

(c) De 0 até 2π quais são, aproximadamente, os arcos x para os quais $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$?

(d) Sobre a rede do gráfico 81, representar as variações da função $y = 2 \operatorname{sen} 2x$.

3. — Por que motivo é preferível, nos gráficos das funções trigonométricas, representar os arcos em radianos?

4. — Qual é o período e a amplitude de cada uma das funções seguintes: (a amplitude só se refere ao seno e ao co-seno).

(a) $\operatorname{sen} 2x$. (c) $2 \operatorname{sen} 2\alpha$. (e) $\operatorname{cosec} 2\theta$.

(b) $3 \cos \frac{\theta}{2}$. (d) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$. (b) $2 \operatorname{tg} \frac{2}{3} \theta$.

5. — Que significam as expressões:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty \,; \qquad \operatorname{cotg} \pi = \mp \infty \,?$$

6. — Quais são as funções trigonométricas que apresentam descontinuidade?

7. — Dizer se está certo, errado ou impreciso, e por quê?:

(*a*) Representa-se o gráfico de uma função por meio de abscissas e de coordenadas.

(*b*) Um ângulo de 1 radiano é igual a 60°.

(*c*) O círculo contém 6 vezes o raio.

(*d*) A tangente de $\frac{\pi}{2}$ é infinita.

(*e*) O seno do arco 2θ é igual a duas vezes o seno do arco θ.

(*f*) A co-tangente é uma função sempre decrescente.

(*g*) Para um mesmo arco o valor numérico da tangente sempre excede o valor numérico do seno.

(*h*) O máximo da função $2 \operatorname{sen} \theta$ é igual a 2.

(*i*) Se $\operatorname{tg} \alpha = m$, temos que $\operatorname{cotg}(180 - \alpha) = \frac{1}{m}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48. — Traçar o gráfico da função $y = \operatorname{sen}(-x)$ e mostrar, pelo gráfico que sempre se tem:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x.$$

49. — Escrever as funções trigonométricas que tenham as características seguintes:

(*a*) sen : amplitude 1, período 2;

(*b*) cos : amplitude $\frac{1}{3}$, período $\frac{\pi}{2}$;

(*c*) tg : período 2;

(*d*) sec : período $\frac{1}{5}$; ordenadas multiplicadas por 2.

(*e*) cotg: período 2; ordenadas divididas por 5.

50. — Escrever a relação existente entre os elementos seguintes:

R (raio do círculo);

α (valor em radianos de um ângulo central);

l (comprimento do arco α).

51. — Construir o gráfico da função $y = \text{sen}\ x + \cos x$.

SUGESTÃO. — Construir os gráficos conjuntos de sen x e cos x. Somar, depois, algèbricamente, as ordenadas correspondentes a cada arco.

52. — Utilizando-se da tábua dos valores das funções trigonométricas (pág. 400) dar, entre 0 e 90°, as raízes das equações seguintes e verificar o resultado no gráfico 80:

(*a*) $\text{sen}\ x = \text{tg}\ x$. (*c*) $\text{tg}\ x = \text{cotg}\ x$.

(*b*) $\text{sen}\ x = \cos x$. (*d*) $\text{cotg}\ x = \text{sen}\ x$.

53. — Utilizando-se da tábua dos valores naturais das funções trigonométricas, construir o gráfico da função $y = \text{sen}\ x$ para os arcos compreendidos entre 0 e 180°. Determinar as ordenadas de 10 em 10 graus. Tomar como amplitude aproximadamente $\frac{1}{3}$ da abscissa correspondente a 180°.

54. — Um móvel M percorre o círculo O com movimento uniforme num tempo T, denominado *período*. A distância e, entre o centro do círculo e a projeção do ponto M sobre o eixo AA' que passa pela origem A do movimento, denomina-se ***elongação***. Esta elongação é considerada positiva à direita de O e negativa à esquerda.

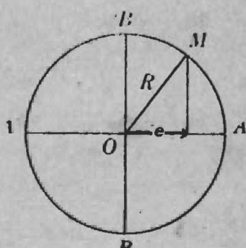

FIG. 83.

(1) Exprimir em radianos o arco $\overset{\frown}{AM}$ percorrido pelo móvel M em t segundos;

(2) Estabelecer a relação que dá a elongação e em função do raio R e do arco $\overset{\frown}{AM}$ calculado em (1).

(3) Traçar o gráfico das variações da elongação e durante um período completo T. A elongação máxima é R e a elongação mínima, $-R$. A elongação $OA = R$ denomina-se ***amplitude*** do movimento do ponto M'.

UNIDADE VIII

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS. ARCOS CORRESPONDENTES A UMA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA DADA.

98. — Funções trigonométricas inversas. — Na função

$$y = \text{sen } x \qquad (1)$$

a variável y, ou aqui o seno, depende do arco x. Se o arco x for conhecido, será fácil determinar o seno correspondente, y.

Inversamente, o arco x depende do seno; para um seno dado, deve existir pelo menos um arco que tenha esse seno. Assim, se o seno de 30° é $\frac{1}{2}$, digo, inversamente que a um seno que tem por valor numérico $\frac{1}{2}$ corresponde um arco de 30°.

Exprime-se que o arco x depende do valor de certo seno y pela função:

$$x = \text{arc sen } y \qquad (2)$$

isto é: x é igual a um arco cujo seno é y. (1)

A função (2), em que as variáveis dependente (x) e independente (y) são respectivamente as variáveis independente e dependente de (1), é uma ***função trigonométrica inversa.***

---

(1) Também se utiliza às vezes a anotação $x = \text{sen}^{-1} y$ que não deve ser confundida com $(\text{sen } y)^{-1}$ que é igual a $\frac{1}{\text{sen } y}$.

A cada uma das 6 funções trigonométricas diretas corresponde uma função trigonométrica inversa; assim, temos:

$$
\begin{array}{ll}
y = \text{sen } x; & x = \text{arc sen } y. \\
y = \cos x; & x = \text{arc cos } y. \\
y = \text{tg } x; & x = \text{arc tg } y. \\
y = \text{cotg } x; & x = \text{arc cotg } y. \\
y = \sec x; & x = \text{arc sec } y. \\
y = \text{cosec } x; & x = \text{arc cosec } y.
\end{array}
$$

É importante notar que:

1.º Dado o arco x de uma função trigonométrica direta, a este arco corresponde apenas um valor da função considerada.

Assim, na função $y = \text{tg } x$, para $x = \frac{\pi}{4}$ temos $y = 1$.

2.º Dado um valor para uma função trigonométrica, existe uma infinidade de arcos, positivos e negativos que têm esse mesmo valor para a função considerada. Assim, na função $x = \text{arc tg } x$, se fizermos $y = 1$, teremos, para valores possíveis do arco x:

$$\ldots \frac{\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{13\pi}{4}, \ldots$$

e

$$\ldots -\frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{7\pi}{4}, \quad -\frac{11\pi}{4}, \quad -\frac{15\pi}{4}, \ldots$$

A função direta é ***unívoca*** e a função inversa é ***plurívoca*** ou melhor, como veremos mais adiante, ***infinitívoca***, pois admite uma infinidade de ***determinações***.

O menor arco, positivo ou negativo, que corresponde a uma função trigonométrica dada denomina-se ***menor determinação*** (positiva ou negativa) do arco correspondente a essa função dada.

Vamos estabelecer a seguir: 1.º As fórmulas que permitem obter todas as determinações possíveis dos arcos correspondentes a uma função trigonométrica dada.

2.º A condição para que dois arcos tenham uma mesma função trigonométrica dada. Por exemplo, a condição para que dois arcos tenham mesmo seno.

O problema que se apresenta é, pois, o seguinte:

Dado, por exemplo, ***um co-seno, determinar os arcos que admitem esse co-seno.***

É o inverso do problema já estudado: ***dado um arco, determinar-lhe as funções circulares.***

99. — Arcos correspondentes a um seno dado. —

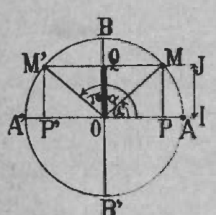

Fig. 84.

Seja (fig. 84) $\overline{IJ}$ o segmento correspondente a um seno dado; levemos esse segmento em $\overline{OQ}$ sobre o diâmetro BB' e tracemos a paralela MM' ao diâmetro AA'; todos os arcos terminados em M ou M' têm um seno igual a IJ e são os únicos arcos que podem ter tal seno; então, ***todos os arcos de um seno dado terminam sobre uma paralela ao diâmetro*** AA'; ora, chamando α a menor determinação desses arcos, todos os outros arcos exprimem-se pelas fórmulas (**8**) e (**9**) (ns. 50 e 51):

$$a = 2k\pi + \alpha \qquad \text{e} \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha \qquad \textbf{(9)}$$

nas quais k é qualquer inteiro, positivo, negativo ou nulo.

Para que 2 arcos tenham senos iguais, é necessário e suficiente que sua diferença seja um número par de semi-circunferências ou que sua sôma seja um número ímpar de semi-circunferências.

Sejam a e α dois arcos do mesmo seno; é necessário e suficiente que satisfaçam a uma das fórmulas (**9**), que podem escrever-se:

$$a-\alpha = 2k\pi \quad \text{e} \quad a+\alpha = (2k+1)\pi.$$

100. — Arcos correspondentes a uma tangente ou a uma co-tangente dada. — 1.° Seja $\overline{IJ}$ (Fig. 85) uma tangente dada; levemos esse valor em $\overline{AT}$ sobre a tangente em A e tracemos a reta OT que corta a circunferência em M e M'; todos os arcos terminados em M e M' têm por tangente $\overline{AT} = \overline{IJ}$ e são os únicos que podem ter tal tangente; então ***todos os arcos de mesma tangente terminam sobre um mesmo diâmetro***; ora, chamando α a menor determinação desses arcos, todos os outros exprimem-se pela fórmula (**10**) (n.° 52):

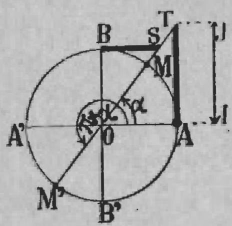

FIG. 85.

$$a = k\pi + \alpha, \qquad \textbf{(10)}$$

na qual k representa qualquer inteiro, positivo, negativo ou nulo.

2.° Se a linha dada fôr a co-tangente, leva-se o seu valor em $\overline{BS}$, sobre a tangente em B e traça-se a reta OS, que intercepta a circunferência em M e em M'; todos os arcos terminados em M e M' têm por co-tangente $\overline{BS}$ e são os únicos que podem ter tal co-tangente; e qualquer desses arcos satisfaz à relação (**10**) (fig. 85).

Para que dois arcos tenham tangentes ou co-tangentes iguais, é necessário e suficiente que sua diferença seja igual a um número inteiro qualquer de semi-circunferências.

Sejam 2 arcos a e α de mesma tangente ou de mesma co-tangente; é necessário e suficiente que satisfaçam à relação (**10**), que também se escreve: $a - \alpha = k\pi$.

101. — Arcos correspondentes a um co-seno dado. — Seja $\overline{IJ}$ (fig. 86) o seno dado; sobre o eixo AA' tomemos o segmento $\overline{OP}$ igual em grandeza e sinal ao co-seno $\overline{IJ}$; pelo ponto P, tracemos a corda MM' paralela ao eixo BB'; todos os arcos terminados em M e M' têm por co-seno $\overline{OP} = \overline{IJ}$ e são os únicos que podem ter tal co-seno; então ***todos os arcos de mesmo co-seno terminam sobre uma paralela ao diâmetro BB'***: ora, chamado α o menor desses arcos, todos os outros exprimem-se pela fórmula (**11**), (n.º 53):

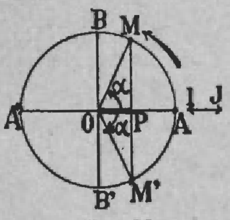

Fig. 86.

$$a = 2k\pi \pm \alpha, \qquad (\mathbf{11})$$

na qual k representa qualquer inteiro positivo, negativo ou nulo.

Para que dois arcos tenham co-senos iguais, é necessário e suficiente que sua soma ou sua diferença seja um número inteiro de circunferências.

Sejam 2 arcos a e α de mesmo co-seno; para isso é necessário e suficiente que satisfaçam à relação (**11**), que pode escrever-se:

$$a \pm \alpha = 2k\pi.$$

102. — Arcos correspondentes a uma secante ou a uma co-secante dada. — 1.º Como a co-secante é o recíproco do seno, as fórmulas (**9**) aplicáveis aos arcos de um seno dado exprimem também os arcos correspondentes a uma co-secante dada.

Para prová-lo diretamente, do centro O com um raio OS igual à co-secante dada, corta-se a tangente traçada pelo ponto B em S e S' e vêm os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AM'}$ que são os das fórmulas (**9**) (fig. 87).

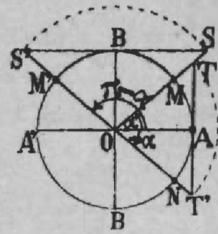

FIG. 87.

2.° Como a secante é o recíproco do co-seno, a fórmula (**11**) referente aos arcos de um co-seno dado, exprime também os arcos correspondentes a uma secante dada (fig. 87).

Para prová-lo diretamente, do centro O com um raio OT igual à secante dada, corta-se a tangente traçada por A em T' e vêm os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AN}$, que são os da fórmula (**11**).

103. — Exercícios resolvidos. — I. — *Calcular o arco* x *que verifica a equação sen* x = *sen* 20°.

A primeira determinação positiva do arco x é 20° e todos os arcos que têm o mesmo seno que o arco 20°, exprimem-se pelas fórmulas (**9**):

$$x = 2k\pi + 20° \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\pi - 20°.$$

Notando-se que $2k$ é sempre par, $2k+1$ é sempre ímpar, k é ora par ora ímpar, podemos reunir as 2 fórmulas precedentes na fórmula única, que dá o mesmo resultado:

$$x = k\pi + (-1)^k \times 20°.$$

II. — *Determinar todos os arcos* x *que satisfazem à igualdade:* tg x = tg 40°.

Os arcos de mesma tangente que o arco de 40°, exprimem-se todos pela fórmula (**10**):

$$x = k\pi + 40°.$$

III. — *Resolver a equação cos y = cos 60°.*

Os arcos de mesmo co-seno que o arco de 60°, exprimem-se todos pela fórmula (**11**):

$$x = 2k\pi \pm 60° = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = (6k \pm 1)\frac{\pi}{2}.$$

IV. — *Quantos valores diferentes toma a expressão sen* $k\frac{\pi}{7}$ *quando* k *toma todos os valores inteiros desde* $-\infty$ *até* $+\infty$?

Façamos sucessivamente $k = 0$, 1, 2,.... 14. Obteremos os arcos $0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \ldots 2\pi$ cujas extremidades dividem o círculo em 14 partes iguais. Para $k > 14$, ou para k negativo, estes pontos se repetem.

Sobre o círculo trigonométrico, construamos as extremidades de todos estes arcos $\frac{k\pi}{7}$. Estes pontos são simétricos dois a dois em relação aos eixos AA' e BB'.

Dois arcos cujas extremidades são simétricas em relação ao diâmetro BB' têm senos iguais; os pontos A e A' têm cada um 0 como seno; de modo que, os valores diferentes de sen $\frac{k\pi}{7}$ são 7, a saber:

$$\text{sen } 0^\circ = \text{sen } \pi = 0, \quad \pm \text{ sen } \frac{\pi}{7}, \quad \pm \text{ sen } \frac{\pi}{7} \quad \text{e} \quad \pm \text{ sen } \frac{\pi}{7}.$$

V. — ***Provar que os valores de tg*** $\sqrt{2}\, k\, \pi$ ***são todos desiguais, quando*** **k** ***varia de*** $-\infty$ ***até*** $+\infty$ ***por valores inteiros.***

Para dois valores diferentes, k' e k'', do inteiro k, não poderemos ter:

$$\text{tg } \sqrt{2}\, k'\pi = \text{tg } \sqrt{2}\, k''\pi.$$

Com efeito, se assim acontecesse, teríamos (n.º 100):

$$\sqrt{2}\, k'\pi = \sqrt{2}\, k'' + n\pi,$$

n sendo qualquer inteiro, positivo, negativo ou nulo.

A igualdade precedente daria

$$\sqrt{2}(k' - k'') = n,$$

o que é absurdo, pois que se o 1.º membro é irracional, o 2.º não pode ser racional.

VI — ***Mediante a tábua das funções trigonométricas resolver a equação*** y = arc tg 0,4.

Procurando o valor 0,4 na coluna das tangentes entre 0 e 45º, encontramos tg 22º = 0,4040.

Teremos, pois, com aproximação de 1 grau, $y = 22^\circ$ ou

$$22^\circ = \text{arc tg } 0{,}4.$$

Esta é a menor determinação positiva do arco y.

Os arcos que têm mesma tangente são dados pela fórmula (**10**). Teremos, pois, aqui:

$$y = k\pi + \mathbf{22^\circ}.$$

VII. — ***Calcular a expressão*** cos (arc tg 1).

Temos em primeiro lugar:

$$\text{arc tg } 1 = 45^\circ.$$

Logo, a expressão dada corresponde a:

$$\cos 45^\circ, \text{ ou } \mathbf{0{,}7071}.$$

VIII. — ***Resolver a equação:***

$$\text{arc sen } y = \text{arc cos } y.$$

Façamos:

$$\text{arc sen } y = \alpha, \quad \text{donde:} \quad y = \text{sen } \alpha \qquad (1)$$

e

$$\text{arc cos } y = \alpha, \quad \text{donde:} \quad y = \cos \alpha. \qquad (2)$$

Por causa de (1) e (2), devemos ter:

$$\text{sen } \alpha = \cos \alpha.$$

Esta equação, já resolvida por meio do gráfico 80, dá

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Logo,

$$y = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \mathbf{0{,}7071}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

55. — Dar todas as determinações dos arcos correspondentes às funções trigonométricas seguintes:

(a) sen 60°. (c) cos 10°.
(b) tg 25°. (d) cotg 120°.

56. — Com auxílio da tábua das funções trigonométricas dizer, com aproximação de 1 grau, quais são os arcos que verificam as equações seguintes:

(a) sen $x = 0{,}2$. (d) tg $\varphi = 0{,}4$.
(b) sen $\theta = 0{,}9$. (e) cotg $\alpha = 19$.
(c) cos $y = 0{,}5$. (f) sec $\beta = 1$.

57. — Resolver do mesmo modo as seguintes equações:

(*a*) $y = \text{arc sen } \frac{1}{2}$. (*d*) $y = \text{arc sen } (-\frac{2}{3})$.

(*b*) $y = \text{arc cos } \frac{3}{4}$. (*e*) $y = \text{arc sen } 2$.

(*c*) $y = \text{arc tg } 3$. (*f*) $y = \text{sen} -1\ 0{,}7$.

58. — Calcular as expressões:

(*a*) $\text{sen } (\text{arc cos } \frac{2}{3})$; (*b*) $\text{tg } (\text{arc cotg } 2)$.

59. — Resolver as equações (utilizar os gráficos 80 e 82):

(*a*) $\text{arc cotg } y = \text{arc tg } y$.

(*b*) $2 \text{ arc sen } y = \text{arc cos } y$.

(*c*) $\text{sen}^{-1} y = \cos^{-1} y$.

UNIDADE IX

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS — IDENTIDADES — EQUAÇÕES

104. — Identidades e equações. — a) ***Identidade trigonométrica é toda igualdade referente a funções trigonométricas, que se verifica para todos os valores das funções e dos arcos para os quais tais funções são definidas.***

Assim, temos as identidades:

(1) $\cos \alpha = -\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\alpha\right)$; (2) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$;

(3) $\frac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$; (4) $\operatorname{arc}\cos y + \operatorname{arc}\operatorname{sen} y = \frac{\pi}{2}$.

A identidade (1) se verifica para todos os valores de α. A identidade (2) se verifica também para todos os valores do arco x. Para o arco $x = 0$, temos $\operatorname{cosec} 0 = \frac{1}{\operatorname{sen} 0}$ ou $\infty = \frac{1}{0}$; esta última igualdade pode ainda ser admitida como expressão de um ***limite*** conhecido. A identidade (3) se verifica para todos os arcos θ; porém para $\theta = \frac{\pi}{2}$; a igualdade toma a forma $\frac{0}{0} = \frac{2}{0}$.

Estas expressões tomam alguma significação sòmente com a ***teoria dos limites,*** e exprimem-se, neste caso particular pelo símbolo $\infty = \infty$; isto significa que o primeiro membro cresce ilimitadamente conservando-se sempre igual ao segundo membro que também cresce ilimitadamente quando θ tende para $\frac{\pi}{2}$.

A identidade (3) é verificada para todos os valores de y para os quais *as* funções arc cos y e arc sen y são definidas, isto é, para y compreendido entre -1 e $+1$, inclusive estes números; fora destes limites a igualdade não tem sentido; porém, não deixa de ser uma identidade.

Estudaremos mais adiante as principais identidades trigonométricas e os processos que permitem verificar se uma igualdade é realmente identidade.

b) Equação trigonométrica *é uma relação de igualdade que envolve funções trigonométricas de arcos desconhecidos e que se verifica apenas para alguns valores desses arcos.*

Já demos exemplos de equações simples que resolvemos aproximadamente por meios gráficos. Veremos mais adiante os processos analíticos utilizados na sua resolução completa.

De modo geral podemos dizer que as identidades devem ser ***provadas*** e as equações devem ser ***resolvidas.***

105. — Identidades fundamentais. — Entre as 4 funções circulares principais, sen, cos, tg e cotg, há 3 relações distintas: são as identidades fundamentais da trigonometria.

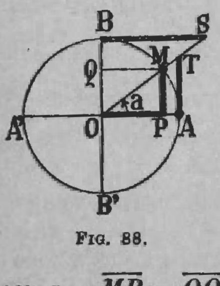

FIG. 88.

Seja o arco $\overset{\frown}{AM} = a$ no 1.º quadrante; tracemos suas funções circulares: sen, cos, tg e cotg (fig. 88).

O raio OA é tomado como unidade e então:

$$\text{sen } a = \overline{MP} = \overline{OQ}; \cos a = \overline{OP}, \text{ tg } a = \overline{AT}, \text{ cotg } a = \overline{BS}.$$

O triângulo retângulo OPM dá:

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2$$

ou

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1} \qquad (12)$$

Os triângulos OMP e OTA são semelhantes e dão:

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}}$$

ou

$$\boxed{\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}} \qquad (13)$$

Os triângulos OBS e OQM são também semelhantes e dão:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{OQ}}$$

ou

$$\boxed{\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}} \qquad (14)$$

As igualdades **(12)**, **(13)** e **(14)** são as três identidades fundamentais.

106. — Generalização. — Embora estabelecidas para o 1.° quadrante, são verificadas para qualquer arco.

Com efeito, seja qual fôr o arco dado, existe sempre um arco do 1.° quadrante com funções trigonométricas iguais, em valor absoluto (n.° 83); portanto, basta verificar os sinais nos 3 últimos quadrantes.

Ora, a fórmula (**12**) é sempre satisfeita, sejam quais forem os sinais do seno e do co-seno, pois encerra apenas quadrados, que são sempre positivos.

A tangente e a co-tangente devem ser positivas no 1.° e no 3.° quadrante e negativas nos 2 outros; é o resultado mesmo que dão as fórmulas (**13**) e (**14**) porque o seno e o co-seno têm mesmo sinal no 1.° e no 3.° quadrante e sinais contrários no 2.° e no 4.°.

107. — Teorema. — ***Entre as 4 funções circulares principais de um mesmo arco:*** sen, cos, tg ***e*** cotg, ***só pode haver 3 relações distintas, aplicando-se a todos os arcos.***

1.° ***Há 3 relações distintas,*** porque cada uma das equações (**12**), (**13**) e (**14**) encerra uma função circular que não figura nas outras.

2.° ***Não pode haver mais de 3 relações distintas,*** porque 4 equações com as 4 incógnitas sen, cos, tg e cotg, haveriam de dar a estas incógnitas valores ***particulares*** e bem ***deteminados,*** o que é visìvelmente impossível, pois que estas funções devem variar de acôrdo com o arco.

108. — Identidades derivadas. — **1.°** Multiplicando-se as identidades (**13**) e (**14**), vem:

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg} a = 1$$

ou

$$\boxed{\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}} \qquad (\mathbf{15})$$

Encontramos outra vez o resultado do n.° 14, 3.°:

a co-tangente é o recíproco da tangente;

a co-secante é o recíproco do seno,

2.° Dado, o sen, calcular as outras funções circulares. — A equação (**12**) dá logo:

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 a};$$

as equações (**13**) e (**14**) vêm a ser:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{tg}\ a = \dfrac{\mathrm{sen}\ a}{\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 a}} \\ \text{e} \\ \mathrm{cotg}\ a = \dfrac{\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 a}}{\mathrm{sen}\ a} \end{array}} \qquad (16)$$

Duplo sinal. — Eis a explicação dos duplos sinais: um seno dado, $\overline{OQ} = \mathrm{sen}\ a$, determina uma infinidade de arcos todos terminados em M e M', de modo que MM' é paralela ao eixo AA'; ora, os arcos AM e AM' possuem: co-senos iguais em valor absoluto e de sinais contrários, $\overline{OP}$ e $\overline{OP'}$; tangentes iguais em valor absoluto e de sinais contrários $\overline{AT}$ e $\overline{AT'}$; e co-tangentes iguais em valor absoluto e de sinais contrários $\overline{BS}$ e $\overline{BS'}$ (fig. 89).

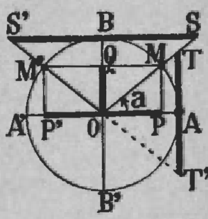

FIG. 89.

3.° Dado o co-seno, calcular as outras funções circulares. — A relação (**12**) dá:

$$\mathrm{sen}\ a = \pm \sqrt{1 - \cos^2 a};$$

e as equações (**13**) e (**14**) dão, portanto:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a} \\ \text{e} \\ \operatorname{cotg} a &= \frac{\cos a}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}} \end{aligned}} \qquad (17)$$

Duplo sinal. — Um co-seno dado, $\overline{OP} = \cos a$, determina uma infinidade de arcos todos terminados em M e M' de modo que MM' seja perpendicular ao diâmetro AA'; ora, os arcos AM e AM' têm: senos iguais em valor absoluto e de sinais contrários, $\overline{MP}$ e $\overline{M'P}$; tangentes iguais em valor absoluto e de sinais contrários, $\overline{AT}$ e $\overline{AT'}$; e co-tangentes iguais em valor absoluto e de sinais contrários, $\overline{BS}$ e $\overline{BS'}$ (fig. 90).

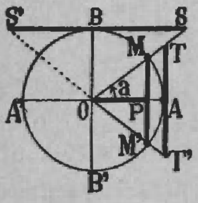

FIG. 90.

3.° — Dada a tangente, calcular as outras funções circulares — Nas equações (**12**) e (**13**)

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1;$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}.$$

eliminemos cos a por substituição; a equação (**13**) dá:

$$\cos a = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{tg} a} \quad \text{ou} \quad \cos^2 a = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a};$$

$$\operatorname{sen}^2 a + \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}^2 a(1+\operatorname{tg}^2 a) = \operatorname{tg}^2 a;$$

A fórmula (**12**) dá:

$$\cos a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}80.$$

A fórmula (**13**) dá:

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a} = \frac{0{,}60}{0{,}80} = 0{,}75.$$

A fórmula (**14**) dá:

$$\text{cotg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a} = \frac{0{,}80}{0{,}60} = 1{,}333\ldots$$

A definição da secante dá:

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{0{,}80} = 1{,}25,$$

e

$$\text{cosec } a = \frac{1}{\text{sen } a} = \frac{1}{0{,}60} = 1{,}666\ldots$$

5.° — Relações com a secante e co-secante. — Na figura 88, o triângulo retângulo OAT dá:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2$$

ou

$$\boxed{\sec^2 a = 1 + \text{tg}^2 a} \qquad (\mathbf{19})$$

Também o triângulo retângulo OBS dá:

$$\overline{OS}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BS}^2$$

ou

$$\boxed{\text{cosec}^2 a = 1 + \text{cotg}^2 a} \qquad (\mathbf{20})$$

109. — Funções circulares de certos arcos. — Notemos que: ***o seno MP de um arco AM é a metade da corda MM' do arco duplo.***

Portanto: ***o lado MM' de qualquer polígono regular convexo é o dobro do seno MP da metade do ângulo central e OP, apótema do polígono, é o co-seno dessa metade do ângulo central*** (fig. 92).

Desigannndo-se por l o lado, e a o apótema de um polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio 1, o ângulo central será $\frac{2\pi}{n}$ e teremos:

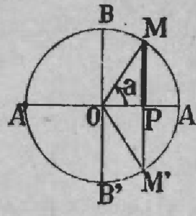

FIG. 92.

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{l}{2} \quad \text{e} \quad \cos \frac{\pi}{n} = a.$$

A geometria (*c. superior*, pág. 486) dá o lado e o apótema dos polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 lados; logo, fazendo-se $R = 1$, e aplicando-se as fórmulas acima, teremos os senos e os co-senos dos arcos $\frac{\pi}{n}$ ou 60°, 45°, 36°, 30°, 22°30′, 18°, 15°:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};\\
&\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};\\
&\operatorname{sen} 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};\\
&\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};\\
&\operatorname{sen} 22^\circ{,}30' = \cos 67^\circ{,}30 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\\
&\operatorname{sen} 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4};\\
&\operatorname{sen} 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2};\\
&\cos 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};\\
&\cos 36^\circ = \operatorname{sen} 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.\\
&\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.\\
&\cos 22^\circ{,}30' = \operatorname{sen} 67^\circ{,}30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\\
&\cos 18^\circ = \operatorname{sen} 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};\\
&\cos 15^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathbf{21})$$

As fórmulas (**13**) e (**14**) dão logo a tangente e a co-tangente dos mesmos arcos; por exemplo, temos:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1;$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Os casos de uso mais frequente são os dos arcos de 60°, 45°, e 30°.

110. — Exercícios resolvidos. — I. — *Sabendo-se que* $\operatorname{sen} a = 3/5$, ***calcular*** $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ *e* $\operatorname{cotg} a$.

A fórmula (**12**) dá:

$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

As fórmulas (**13**) e (**14**) dão:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \pm\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \pm\frac{4}{3}.$$

II. — ***Sabendo-se que*** $\operatorname{tg} a = -\frac{3}{4}$, ***calcular*** $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ ***e*** $\operatorname{cotg} a$.

A fórmula (**18**) dá:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\frac{3}{4}}{\pm\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \mp\frac{3}{5};$$

$$\cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \pm\frac{4}{5}.$$

A fórmula (**14**) dá:

$$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = -\frac{4}{3}.$$

III. — ***Sabendo-se que*** $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$, ***calcular*** $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ ***e*** $\operatorname{cotg} x$.

A fórmula (**18**) dá:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\frac{a}{b}}{\pm\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}.$$

$$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}.$$

A fórmula (14) dá:

$$\text{cotg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x} = \frac{b}{a}.$$

111. — Prova de identidade. — O problema se apresenta nos seguintes termos: Dada uma igualdade que contém funções trigonométricas de um arco, ***provar*** que esta igualdade se verifica para todos os valores desse arco.

Por exemplo, provar que temos sempre:

$$\text{sen}^4\ \theta - \cos^4\ \theta = \text{sen}^2\ \theta - \cos^2\ \theta.$$

O processo consiste em se transformar cada membro, mediante substituições ou operações algébricas de modo a se obterem dois membros idênticamente iguais, por exemplo: $\text{sen}\ x \cos x = \text{sen}\ x \cos x$. É evidente que neste caso fica provadá a identidade.

Para se chegar a tal resultados dois métodos se apresentam.

1.° Método. — ***Transformar apenas um dos membros da identidade.*** — Utilizam-se para isso as identidades fundamentais já estabelecidas e os métodos algébricos de transformação.

EXEMPLO. — Verificar a identidade

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{cosec}\ \alpha} = 1 - \frac{\cos\ \alpha}{\sec\ \alpha}.$$

Transformemos o segundo membro, guiando-nos pelo resultado que pretendemos obter, isto é: o primeiro membro

Temos sucessivamente: (definição de secante e fórmula (12)

$$1-\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}=1-\frac{\cos\alpha}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=1-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha=$$

$$=\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\alpha.\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}.$$

Os dois membros são, pois, idênticamente iguais.

2.° Método. — Transformação de ambos os membros simultâneamente. — Este proceso e, às vezes, mais simples do que o primeiro, principalmente quando ambos os membros são desenvolvidos e podem ser transformados em expressões mais simples.

EXEMPLO. — Provar a identidade

$$\operatorname{cosec}^2 x.\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 x+1.$$

Teremos, simultâneamente:

1.° Membro

$$\operatorname{cosec}^2 x.\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

2.° Membro

$$\operatorname{tg}^2 x+1=\sec^2 x$$

(fórmula 19).

A pesquisa termina, em ambos os membros, quando se chega a um mesmo resultado.

A identidade obtida aqui é completa e estende-se a todo valor de x, desde $-\infty$ até $+\infty$.

112. — Prova de não identidade. — As transformações indicadas para provar uma identidade, conduzem, em geral, a formas idênticamente iguais ou a alguma das formas fundamentais de identidades conhecidas. Se o resultado for irredutível a alguma dessas formas, diz-se que ***não há identidade*** entre o primeiro e o segundo membro.

113. — Sugestões relativas à prova de identidade. — De modo geral, eis algumas sugestões que podem ser aplicadas com segurança para se provar uma identidade:

(**a**) Utilizar o 1.º método quando um dos membros é mais desenvolvido que o outro. Tratar, então, o membro mais extenso da identidade, procurando reduzi-lo à forma do outro.

(**b**). Aplicar o segundo método quando ambos os membros são igualmente desenvolvidos.

(**c**) Usar apenas operações que podem ser aplicadas a cada membro em particular, como seja: desenvolver, fatorar, somar e subtrair simultâneamente ao membro dado uma mesma quantidade, multiplicar e dividir, simultâneamente por uma mesma quantidade; etc.

(**d**) Substituir uma expressão por outra idêntica.

(**e**) Nas expressões que contêm a secante, a co-secante ou a co-tangente, substituir, geralmente, essas funções de modo a se obterem apenas as funções ***seno, co-seno*** e ***tangente.***

114. — Equações trigonométricas. — Já definimos as equações trigonométricas como sendo ***igualdades que contêm funções trigonométricas de arcos desconhecidos e que se verificam apenas para alguns valores particulares desses arcos.***

Os arcos para os quais a igualdade se verifica são as ***raízes*** da equação.

O ***arco*** desconhecido é a ***incógnita principal*** da equação.

As funções que contêm esse arco são ***incógnitas auxiliares.***

A resolução de uma equação trigonométrica envolve operações que são em parte algébricas e em parte trigonométricas.

Os mesmos princípios em que se baseia a resolução das equações algébricas podem ser aplicados à resolução das equações trigonométricas.

O estudo das equações trigonométricas será feito mais adiante com maior precisão. Limitaremos aqui o seu estudo aos casos elementares necessários para a compreensão do que segue.

As tábuas dos valores das funções trigonométricas serão por enquanto usadas na determinação final dos arcos.

115. — Método geral de resolução. — Eis os principais passos na resolução das equações.

1. Quando a equação proposta contém mais de uma função trigonométrica em que figura a incógnita, transforma-se a equação por meio das identidades fundamentais de modo a se obter uma equação com uma única função circular do arco incógnito.

2. Tomar essa função como incógnita auxiliar e resolver a equação pelos processos habituais da álgebra. Chega-se deste modo a uma das formas simples:

$$\operatorname{sen} x = a; \quad \cos x = b; \quad \operatorname{tg} x = c; \quad \text{etc.}$$

3. Dar todos os arcos que satisfazem à equação final. A menor determinação desses arcos pode ser encontrada, para as equações numéricas, por meio da tábua dos valores das funções trigonométricas.

EXEMPLOS. — **I.** — Resolver a equação

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x - 4 = 0.$$

Desde que a equação contém duas funções trigonométricas diferentes, vamos substituir o seno em função do co-seno. Temos (**12**)

$$2(1-\cos^2 x) + 5 \cos x - 4 = 0.$$

ou

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0.$$

Tomando $\cos x$ como incógnita auxiliar e resolvendo a equação do 2.º grau correspondente, temos:

$$\cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4.2.2}}{2.2} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Temos, pois, as duas equações:

$$\cos x = \frac{8}{4} = 2;$$

e

$$\cos x = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

A primeira equação é impossível visto que um co-seno não pode ser maior do que 1.

A segunda dá:

$$x = 60^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{3}.$$

Os arcos que têm mesmo co-seno do que $\frac{\pi}{3}$ são dados pela relação (n.º 53, fórmula 11):

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

São estes os valores de x que satisfazem à equação dada.

II. — Resolver a equação $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$.

Em lugar de $\cos x$, podemos escrever (**16**):

$$\cos x = \pm \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Substituindo na equação dada, temos:

$$\operatorname{sen} x \mp \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = 1;$$

ou $$\mp\sqrt{1-\text{sen}^2 x} = 1-\text{sen}\, x;$$

e, elevando ambos os membros ao quadrado:

$$1-\text{sen}^2 x = 1-2\,\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x;$$

ou ainda $$\text{sen}^2 x-\text{sen}\, x = 0.$$

Fatorando sen x, temos:

$$\text{sen}\, x(\text{sen}\, x-1) = 0.$$

Esta equação se desdobra nas duas seguintes:

(1) $\text{sen}\, x = 0$

(2) $\text{sen}\, x - 1 = 0$ ou $\text{sen}\, x = 1.$

A equação (1) daria como raízes

$$x' = k\pi.$$

A equação (2) é satisfeita para:

$$x'' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

De 0° até 360°, teríamos como raízes: 0°,90°,180°. Porém, se fizermos a verificação veremos que as raízes x' não satisfazem à equação dada. Apenas as raízes x'' é que servem. Esse resultado se apresenta com frequência quando, no decorrer das transformações houve necessidade de se elevar a equação ao quadrado. Quando isso ocorre, é preciso proceder à verificação da conveniência das raízes e rejeitar aquelas que possìvelmente não servirem.

As únicas raízes são pois os arcos

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2};$$

são os arcos terminados em B, no círculo trigonométrico.

116. — Resumo das principais identidades já demonstradas.

Para facilitar ao aluno a resolução das questões propostas, eis um quadro das principais identidades já demonstradas. É muito útil guardá-las de memória. No fim do livro, página 384, ver o quadro geral das relações importantes.

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \tag{13}$$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \tag{14}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cotg} a} \tag{15}$$

$$\sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a \tag{19}$$

$$\operatorname{cosec}^2 a = 1 + \operatorname{cotg}^2 a \tag{20}$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}; \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

60. — Exprimir $\operatorname{tg} x$ em função de $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$.

61. — Dado $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$, calcular as outras funções circulares do arco x.

62. — Dado $\cos x = 0{,}27$, calcular $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$.

63. — Dado $\sec x = 2$, calcular as outras funções circulares do arco x.

64. — Calcular o valor numérico da expressão

$$\cos 3x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{sen} x$$

para $x = -\frac{\pi}{2}$.

65. — Calcular o valor da expressão

$$2 \cos x - 3 \operatorname{tg} x$$

sabendo-se que o arco x pertence ao segundo quadrante e que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

66. — Sabendo-se que $\text{sen}\ x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, achar o valor de $\text{cosec}\ x - \text{cotg}\ x$. Dar as duas respostas possíveis.

67. — Escrever as expressões seguintes em função de sen x:

(a) $\text{tg}\ x . \sec x$.

(b) $\sec^4 x - \text{tg}^4 x$.

(c) $\text{cosec}^2 x (1 - \text{cotg}^2 x)$.

(d) $\dfrac{\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x}{\sqrt{1 + \text{cotg}^2 x}}$.

68. — Provar as identidades seguintes:

(a) $\sec x = \dfrac{\text{tg}\ x}{\text{sen}\ x}$.

(b) $\sec^2 \alpha = \dfrac{1}{1 - \text{sen}^2 \alpha}$.

(c) $\dfrac{\text{sen}\ x}{\text{cosec}\ x} = 1 - \dfrac{\cos x}{\sec x}$.

(d) $\dfrac{\text{tg}\ \theta + 1}{\text{tg}\ \theta - 1} = \dfrac{1 + \text{cotg}\ \theta}{1 - \text{cotg}\ \theta}$.

69. — Demonstrar as 3 identidades seguintes:

(a) $\sec^2 x - \text{cosec}^2 x = (\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x)(\text{tg}\ x - \text{cotg}\ x)$.

(b) $\sec^4 x - 1 = \text{tg}^2 x\ (\text{tg}^2 + 2)$.

(c) $\text{tg}\ x + \sec x = \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen}\ x}{1 - \text{sen}\ x}}$.

70. — Resolver as equações seguintes (dar os ângulos com aproximação de grau):

(a) $\cos^2 x - 1 = 0$.

(b) $\cos^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$.

(c) $2\ \text{sen}^2 x + 3 \cos x = 3$.

(d) $\text{tg}\ x = \sec x$.

(e) $\text{sen}\ x = \cos x$.

(f) $\text{sen}\ x = \text{tg}\ x$.

71. — Dizer em cada caso se há ou não há identidade:

(a) $\text{sen}\ A . \text{cotg}\ A = \cos A$.

(b) $\text{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$.

(c) $\cos A . \sec A = 1$.

(d) $\dfrac{\sec \alpha}{\text{cosec}\ \alpha} = \text{cotg}\ \alpha$.

72. — Dizer se as igualdades seguintes se verificam para todos os valores do arco ou apenas para alguns valores particulares; neste último caso dar, de 0 até 360°, as determinações desses arcos:

(a) $\text{sen}^2 \theta - \cos \theta = 1$.

(b) $\sec^2 \alpha \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 0$.

(c) $2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha = \cos^2 \alpha$.

(d) $\text{sen}\ x + \cos x = 0$.

UNIDADE X

MEDIDA ALGÉBRICA DA PROJEÇÃO — SOMA DE ARCOS

116. — Medida algébrica da projeção de um segmento. — Vimos (n.os 60 e 61) em que consiste a projeção ortogonal de um segmento dirigido sobre um eixo ***situado no mesmo plano.*** Nos problemas que seguem, precisaremos avaliar o valor algébrico da projeção em função do ***módulo*** (ou medida absoluta do segmento) e do ***ângulo*** que esse segmento faz com o eixo de projeção. Os teoremas e as aplicações que seguem referem-se ainda a projeções de eixos e vectores situados num mesmo plano. (1)

117. — Teorema. — ***A projeção de um vector sobre um eixo orientado, é igual, em módulo e sinal, ao módulo do vector multiplicado pelo co-seno do ângulo da direção do vector com a direção positiva do eixo*** (fig. 93).

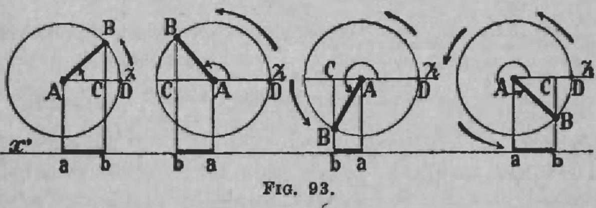

FIG. 93.

Seja $\overrightarrow{AB}$ um vector e $\overrightarrow{ab}$ sua projeção sobre o eixo orientado $x'x$; pela origem A do vector, tracemos a reta

(1) Ver, n.º 282, *"Complementos sobre os vectores"*.

Az paralela à direção positiva de $x'x$ e seja C a intersecção de Az com a projetante Bb; em todas as posições do vector, teremos sempre:

$$\text{pr.}\overline{AB} = \overline{ab} = \overline{AC} = \overline{AB}.\cos \widehat{zAB}.$$

Com efeito, da origem A como centro, tracemos o círculo de ráio AB, que intercepta Az em D e tomemos D como origem dos arcos.

O vector $\overrightarrow{AB}$ pode figurar em cada um dos 4 quadrantes e em cada caso temos sempre, por definição:

$$\cos \widehat{zAB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

que dá: $\overline{AB}$ ou $\overline{ab} = \overline{AB}.\ \cos \widehat{zAB}.$

118. — Corolário. — ***Obtém-se a projeção de um contorno poligonal sobre um eixo orientado, multiplicando-se o módulo de cada segmento pelo co-seno do ângulo de sua direção com a direção positiva do eixo e somando-se os resultados.***

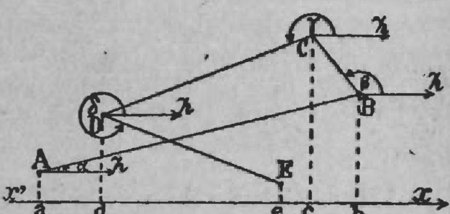

FIG. 94.

Seja o contorno poligonal $ABCDE$ (fig. 94), de segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, que formam com a direção positiva do eixo $x'x$ os ângulos respectivos α, β, γ, δ; teremos:

$$\text{pr.}(ABCDE) = \text{pr.}\overline{AB} + \text{pr.}\overline{BC} + \text{pr.}\overline{CD} + \text{pr.}\overline{DE}$$

que vem a ser (n.° 117):

$$\text{pr.}(ABCDE) = \overline{AB}\cos\alpha + \overline{BC}\cos\beta + \overline{CD}\cos\gamma + \overline{DE}\cos\delta.$$

Nota. — O contorno $ABCDE$ admite como ***resultante*** o segmento $\overline{AE}$ que une a origem do primeiro segmento do contorno com a extremidade do último (n.º 60).

Ora, a projeção de um contorno é igual à projeção da sua resultante (n.º 61). Se, pois, a resultante $\overline{AE}$ fizer um ângulo θ com a direção positiva do eixo $x'x$, a projeção do contorno terá como expressão:

$$\text{pr.}(ABCDE) = \text{pr.}(\overline{AE}) = \overline{AE}\cos\theta.$$

Conseqüência. — Se dois contornos tiverem mesmas extremidades e mesma origem, terão também mesma resultante e por conseguinte mesma projeção sobre um eixo qualquer.

119. — Objeto desta unidade. — Na unidade anterior demonstramos as identidades fundamentais e utilizamo-las para deduzir outras identidades e resolver algumas equações trigonométricas. Vamos estudar agora novas ***identidades*** de grande utilidade no prosseguimento do estudo das equações, das identidades e na resolução completa dos triângulos obliquângulos.

120. — Cálculo do seno e do co-seno da soma de dois arcos. — Vamos resolver o seguinte problema: ***Dados os senos e os co-senos de dois arcos a e b calcular os senos e os co-senos do arco a + b.***

DADOS:	CALCULAR:
sen a, cos a, sen b, cos b.	sen$(a+b)$, $cos(a+b)$.

O método das projeções dá logo o resultado e em todos os casos possíveis, porque os teoremas das projeções são gerais. Eis como se procede:

Sobre o círculo trigonométrico (fig. 95), tomemos $\widehat{AC} = a$ e depois $\widehat{CD} = b$; tracemos OC e OD; abaixemos as perpendiculares DP sobre OA e DE sobre OC e tracemos EF e EG paralelas respectivamente às direções positivas dos eixos OA e OB.

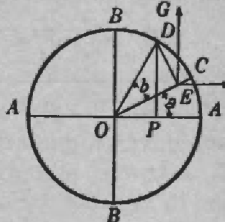

FIG. 95.

Sobre qualquer eixo, as projeções dos dois contornos OPD e OED são iguais, pois que ambos têm mesma resultante $\overline{OD}$ (n.º 118).

Logo, temos sempre:

$$\text{pr.}\overline{OP} + \text{pr.}\overline{PD} = \text{pr.}\overline{OE} + \text{pr.}\overline{ED} \qquad (a)$$

Calcular sen $(a + b)$. — Projetemos sobre BB' os contornos OPD e OED; teremos:

$$\text{pr.}\overline{OP} = 0. \qquad \text{pr.}\overline{PD} = \text{sen}\,(a + b);$$

$$\text{pr.}\overline{OE} = \overline{OE}.\cos BOE = \overline{OE}.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos b \,\text{sen}\, a;$$

$$\text{pr.}\overline{ED} = \overline{ED}.\cos GED = \overline{ED} \cos a = \text{sen}\, b \cos a;$$

então a equação (a) dá:

$$\boxed{\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \cos b + \cos a \,\text{sen}\, b} \qquad (22)$$

Calcular $\cos(a+b)$. — Sobre o eixo $A'A$, projetemos os dois mesmos contornos OPD e OED; teremos:

$$\text{pr.}\overline{OP} = \cos\,(a + b), \qquad \text{pr.}\overline{PD} = 0;$$

$$\text{pr.}\overline{OE} = \overline{OE}.\cos AOE = \overline{OE}.\cos a = \cos a \cos b;$$

$$\text{pr.}\overline{ED} = \overline{ED}.\cos FED = \overline{ED}.\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\text{sen } a \text{ sen } b$$

(n.º 82); então, a relação (a) dá:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b} \quad (23)$$

Notas. — 1.º a soma ACD dos arcos a e b pode terminar em qualquer quadrante, e as fórmulas (**22** e **23**) são sempre verdadeiras porque o teorema das projeções se aplica a todos os casos.

2.º O traçado de EF e EG, paralelas aos eixos OA e OB, não é necessário, mas facilita muito as projeções de $\overline{ED}$.

3.º Como as fórmulas (**22** e **23**) são gerais, servem também para a ou b positivos, nulos ou negativos.

Calcular sen ($a-b$) e cos ($a-b$). — Nas fórmulas gerais (**22** e **23**), transformemos b em $-b$, e notando que $\text{sen}(-b) = -\text{sen } b$ e $\cos(-b) = \cos b$, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}(a-b) &= \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b; \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (24) \\ (25) \end{aligned}$$

Nota. — As fórmulas acima podem resumir-se nas 2 seguintes:

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \cos a \text{ sen } b.$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{ sen } b.$$

121. — Problema. — Calcular sen ($a+b+c$) e cos ($a+b+c$). — As fórmulas (**22** e **23**) estendem-se fàcilmente aos casos do seno e do co-seno de 3 ou mais arcos.

Por exemplo, em lugar de b pondo $b+c$, na fórmula (**22**), temos:

$$\text{sen}[a+(b+c)] = \text{sen } a \cos(b+c) + \cos a \text{ sen}(b+c)$$

ou, substituindo $\cos(b+c)$ e $\text{sen}(b+c)$ por seus valores:

$$\text{sen}\,(a+b+c) = \begin{cases} \text{sen}\,a \cos b \cos c + \cos a\,\text{sen}\,b \cos c \\ +\cos a \cos b\,\text{sen}\,c - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c. \end{cases}$$

Do mesmo modo, a fórmula (**23**) dá:

$$\cos\,(a+b+c) = \begin{cases} \cos a \cos b \cos c - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b \cos c \\ -\text{sen}\,a \cos b\,\text{sen}\,c - \cos a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c. \end{cases}$$

Procedendo de modo análogo, pode-se calcular sucessivamente o seno e o co-seno da soma de 4, 5, 6 ou mais arcos em função dos senos e co-senos de cada arco.

Cada fórmula é um polinómio inteiro e homogêneo em relação aos senos e co-senos de cada arco e cada termo encerra o seno ou o co-seno de cada arco da soma.

Os arcos a, b, c,... podem ser positivos ou negativos.

122. — Aplicação à tangente. — 1.° Aplicando-se a fórmula (**13**) ao arco $a+b$, *temos*:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)};$$

desenvolvendo o 2.° membro, vem:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b}{\cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}.$$

Afim de se obter o resultado em função de tg b, basta dividir o numerador e o denominador por $\cos a \cos b$ e vem:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} + \dfrac{\text{sen}\,b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{\cos a \cos b}};$$

ou

$$\boxed{\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}} \qquad \textbf{(26)}$$

ou, substituindo $\cos(b+c)$ e $\operatorname{sen}(b+c)$ por seus valores:

$$\operatorname{sen}(a+b+c) = \begin{cases} \operatorname{sen} a \cos b \cos c + \cos a \operatorname{sen} b \cos c \\ + \cos a \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c. \end{cases}$$

Do mesmo modo, a fórmula (**23**) dá:

$$\cos(a+b+c) = \begin{cases} \cos a \cos b \cos c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c \\ - \operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c - \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c. \end{cases}$$

Procedendo de modo análogo, pode-se calcular sucessivamente o seno e o co-seno da soma de 4, 5, 6 ou mais arcos em função dos senos e co-senos de cada arco.

Cada fórmula é um polinómio inteiro e homogêneo em relação aos senos e co-senos de cada arco e cada termo encerra o seno ou o co-seno de cada arco da soma.

Os arcos $a, b, c, \ldots$ podem ser positivos ou negativos.

122. — Aplicação à tangente. — 1.º Aplicando-se a fórmula (**13**) ao arco $a+b$, *temos*:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)};$$

desenvolvendo o 2.º membro, vem:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Afim de se obter o resultado em função de tg b, basta dividir o numerador e o denominador por $\cos a \cos b$ e vem:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}};$$

ou

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}} \qquad (26)$$

2.º Trocando-se b em $-b$ e lembrados que tg $(-b) = -$tg b, a fórmula (**26**) vem a ser:

$$\boxed{\text{tg}\,(a-b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}} \qquad (\mathbf{27})$$

3.º Fabendo $b = 45°$, e notando-se que tg $45° = 1$,

$$\text{tg}\,(45°+a) = \frac{1+\text{tg}\,a}{1+\text{tg}\,a}$$

e

$$\text{tg}\,(45°-a) = -tg\,(a-45°) = \frac{1-\text{tg}\,a}{1+\text{tg}\,a}$$

123. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Calcular cotg*** $(a \pm b)$ ***conhecendo cotg* a *e cotg* b.**

Temos (**14**):

$$\text{cotg}\,(a+b) = \frac{\cos\,(a+b)}{\text{sen}\,(a+b)};$$

donde (**22** e **23**):

$$\text{cotg}\,(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b}.$$

Dividindo os dois termos desta fração pela expressão sen a sen b, temos:

$$\text{cotg}\,(a+b) = \frac{\dfrac{\cos a \cos b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b} - \dfrac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}}{\dfrac{\text{sen}\,a \cos b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b} + \dfrac{\cos a\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}}.$$

e depois de simplificação:

$$\text{cotg}\,(a+b) = \frac{\text{cotg}\,a\,\text{cotg}\,b - 1}{\text{cotg}\,b + \text{cotg}\,a}.$$

Obtém-se do mesmo modo:

$$\text{cotg}\,(a-b) = \frac{\text{cotg}\,a\,\text{cotg}\,b + 1}{\text{cotg}\,b - \text{cotg}\,a}.$$

Podem-se reunir estas duas fórmulas do modo seguinte:

$$\cot g\,(a \pm b) = \frac{\cot g\, a \cot g\, b \mp 1}{\cot g\, b \pm \cot g\, a}.$$

II. — ***Calcular o seno e o co-seno do arco de* 105°, *notando-se que* 105° = 60° + 45°.**

Fazendo $a = 60°$ e $b = 45°$,

temos (**22**) $\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}\,(60° + 45°)$
$= \operatorname{sen} 60° \cos 45° + \cos 60° \operatorname{sen} 45°$;

e (**23**) $\cos 105° = \cos\,(60° + 45°)$
$= \cos 60° \cos 45° - \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45°$.

Mas (n.° 109):

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

logo:

$$\operatorname{sen} 105° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \mathbf{0{,}9659}.$$

$$\cos 105° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \mathbf{0{,}2588}.$$

III. — ***Demonstrar as identidades:***

$$\operatorname{sen}\,(a+b)\operatorname{sen}\,(a-b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b. \qquad (1)$$

$$\cos\,(a+b)\cos\,(a-b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b. \qquad (2)$$

(**a**) — O 1.° membro da primeira relação dá sucessivamente:

$(\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)\ (\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a)$,

ou $\operatorname{sen}^2 a \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cos^2 a$,

ou $\operatorname{sen}^2 a\ (1 - \operatorname{sen}^2 b) - \operatorname{sen}^2 b\ (1 - \operatorname{sen}^2 a)$,

ou ainda $\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$.

E assim fica demonstrada a relação (1).

(**b**) — O 1.° membro da 2.ª relação dá sucessivamente:

$(\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)\ (\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)$,

ou $\cos^2 a \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b$,

ou $$\cos^2 a\,(1-\operatorname{sen}^2 b)-(1-\cos^2 a)\operatorname{sen}^2 b,$$
ou ainda: $$\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 b.$$

E fica provada a relação (2).

IV. — ***Supondo que*** $a+b+c=180^\circ$, ***demonstrar a relação:***

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c.$$

Por causa da condição $a+b=180^\circ-c$, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\operatorname{tg}(180^\circ-c)$$

ou $$\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}=-\operatorname{tg} c,$$

ou $$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b=-\operatorname{tg} c+\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c$$

ou enfim: $$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c.$$

E assim fica verificada a relação (2).

124. — Resumo das fórmulas. — Eis as principais identidades relativas à soma e diferença de arcos:

$$\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen} a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen} b. \qquad (22 \text{ e } 24)$$

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b. \qquad (23 \text{ e } 25)$$

$$\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg} a\pm\operatorname{tg} b}{1\mp\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b} \qquad (26 \text{ e } 27)$$

$$\operatorname{cotg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b\mp 1}{\operatorname{cotg} b\pm\operatorname{cotg} a}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

73. — Calcular a projeção de um segmento de reta $\overline{AB}$ de 20 cm de comprimento sabendo que faz os ângulos seguintes com a direção positiva do eixo de projeção:

(*a*) 38° (*c*) 210°
(*b*) 115° (*d*) —15°.

74. — Um avião tem uma velocidade de 200 km/h. na direção N 65° E. Calcular a sua velocidade em relação a cada uma das direções fundamentais N, S, E, W.

75. — Num círculo de 2 m de raio levam-se sucessivamente duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ que subtendem respectivamente arcos de 20° e 50°. Calcular:

1.º O comprimento de cada corda.

2.º A projeção da corda $\overline{BC}$ sobre o diâmetro $\overline{AD}$.

76. — Um trapézio $ABCD$ tem como base menor $BC = 12$ cm. Os lados não paralelos, AB e CD, fazem com a base maior AD, ângulos respectivos de 47º e 36º. Calcular a base maior e o lado CD, sabendo-se que o lado AB tem 8 cm.

77. — Baseando-se na figura 96 demonstrar geomètricamente a identidade:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

Tomar:

AB, perpendicular a OB;

AC, perpendicular a OD.

Fazer $OA = 1$.

Escrever:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \frac{\overline{CA}}{\overline{OA}} = \overline{CA} = \overline{CE} + \overline{EA}.$$

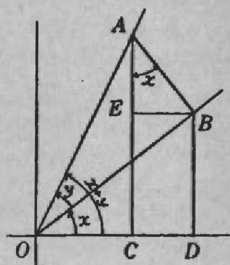

FIG. 96.

78. — Calcular o seno e o co-seno de 90º partindo dos valores das funções seno e co-seno de 30º e de 60º.

79. — Por meio das funções dos arcos de 45º e 30º calcular as funções do arco de 15º.

80. — Calcular tg 12º notando-se que 12º = 30º — 18º.

Dados: $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 18^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

81. — Sabendo-se que $\cos a = \frac{5}{13}$ e $\cos b = \frac{4}{5}$, calcular $\operatorname{sen}(a+b)$.

82. — Exprimir $\operatorname{tg}(x + 30^\circ)$ em função de tg x.

83. — Calcular $\operatorname{tg}(a+b+c)$ em função de tg a, tg b e tg c.

SUGESTÃO: Considerar primeiro $b + c$ como um só arco e desenvolver depois de aplicar a fórmula **26**.

Escrever: $\operatorname{tg}[a + (b + c)]$.

84. — Calcular as funções do arco de 225º usando as funções dos arcos de 315º e 60º.

85. — Supondo $a + b + c = 180^\circ$ demonstrar as relações:

(*a*) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$

(*b*) $\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} c + \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c = 1.$

86. — Demonstrar as identidades:

(*a*) $\operatorname{sen}(a+b) \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b.$

(*b*) $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b.$

87. — Calcular o seno e o co-seno do arco de 27°.

$$(27^\circ = 45^\circ - 18^\circ).$$

88. — Verificar a identidade:

$$\frac{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)}.$$

89. — Verificar se as expressões seguintes são identidades:

(*a*) $\sec^2(x+y) - \operatorname{tg}^2(x+y) = 1.$

(*b*) $\cos 3x . \operatorname{tg} 3x = \operatorname{sen} 3x.$

90. — Dizer se está certo ou errado, e por quê?:

(*a*) O seno da soma de dois arcos é igual à soma dos senos desses mesmos arcos.

(*b*) A tangente do arco $3a$ é igual a 3 vezes a tangente do arco a.

(*c*) A tangente de $2a$ pode se exprimir em função de $\operatorname{tg} a$.

(*d*) A expressão $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$ é igual a $\operatorname{sen} \theta$.

91. — Demonstrar geomètricamente a identidade

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y},$$

em que x e y são ângulos agudos.

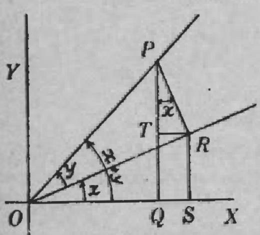

FIG. 97.

SUGESTÃO. — Na figura 97, temos:

PR, perpendicular a *OR*;

PQ, perpendicular a *OS*;

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{QP}{OQ} = \frac{QT+TP}{OS-QS} = \frac{SR+TP}{OS-TR}$$

UNIDADE XI

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DOS ARCOS

124. — Multiplicação dos arcos. — Problema. — ***Calcular as funções circulares dos múltiplos de um arco, conhecendo-se as funções circulares desse arco.***

Esse problema é apenas uma aplicação do problema da soma dos arcos, porque o arco ma, múltiplo de a, é igual à soma $a+b+c+\ldots+l$, em que $a = b = c = \ldots = l$. Portanto, nas fórmulas precedentes, bastará que se faça $b = a$, $c = a$, etc. para se obterem logo as funções circulares dos arcos $2a$, $3a\ldots$

Por exemplo, nas fórmulas (**22**, **23** e **26**), fazendo $b = a$, temos logo:

1.º $\quad \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b;$

ou

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a} \qquad (\mathbf{28})$$

2.º $\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} \qquad (\mathbf{29})$$

3.º $\quad \operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b};$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} \qquad (\mathbf{30})$$

86. — Igualmente as fórmulas do arco $a+b+c$ (n.º 121) darão, fazendo $b=a$ e $c=a$:

1.º $\operatorname{sen}(a+b+c)=\begin{cases}\operatorname{sen} a \cos b \cos c+\cos a \operatorname{sen} b \cos c \\ +\cos a \cos b \operatorname{sen} c-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c;\end{cases}$

$$\boxed{\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a} \qquad (31)$$

2.º $\cos(a+b+c)=\begin{cases}\cos a \cos b \cos c-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c \\ -\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c-\cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c;\end{cases}$

$$\boxed{\cos 3a = \cos^3 a - 3 \operatorname{sen}^2 a \cos a} \qquad (32)$$

3.º $\operatorname{tg}(a+b+c) = \dfrac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b-\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c};$

$$\boxed{\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1-3 \operatorname{tg}^2 a}} \qquad (33)$$

125. — **Problema.** — ***Dado sen* a, *calcular sen* 2a; *dado cos* a, *calcular cos* 2a *e explicar os sinais.***

1.º As fórmulas (**12** e **28**): $\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1$,

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a,$$

dão logo:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = \pm 2 \operatorname{sen} a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}} \qquad (34)$$

2.º As fórmulas (**6** e **23**) $\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1$,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a,$$

dão logo:

$$\boxed{\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1} \qquad (35)$$

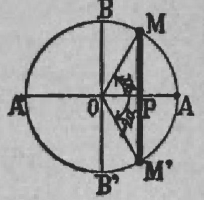

FIG. 98.

Sinal de sen $2a$. — Dado sen a, os arcos a são determinados pelas fórmulas:

$$a = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

α designando o menor desses arcos e k qualquer inteiro positivo, negativo ou nulo.

Os arcos $2a$ valerão:

$$2a = 4k\pi + 2\alpha \quad \text{e} \quad 2a = (4k+2)\pi - 2\alpha.$$

Construamos esses arcos 2a: 1.° os arcos $4k\pi$ e $(4k+2)\pi$ são circunferências inteiras e terminam todos na origem A; — 2.° os arcos $4k\pi+2\alpha$ terminam todos no ponto M de modo que $AM = 2\alpha$ e os arcos $(4k+2)\pi-2\alpha$ terminam todos no ponto M', simétrico de M em relação a $A'A$, de modo que $A'M = -2\alpha$; esses arcos AM e AM' têm senos iguais em valor absoluto e de sinais contrários, MP e $M'P$.

Sinal de cos $2a$. — Dados cos a, os arcos a são determinados pela fórmula:

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

tendo α e k a significação que precede.

Os arcos $2a$ serão determinados pela fórmula:

$$2a = 4k\pi \pm 2\alpha.$$

Construamos esses arcos $2a$: 1.° os arcos $4k\pi$ terminam todos na origem A; — 2.° o arco 2α termina em M e o arco -2α em M', simétrico de M em relação ao eixo $A'A$, e tal que $AM = AM'$; esses arcos AM e AM' têm mesmo co-seno OP.

126. — Nota. — Todas as fórmulas precedentes, desde **12** até **35**, são ***identidades***; verificam-se para qualquer valor dos arcos.

Portanto, o arco a pode ser substituido pelo arco $\frac{a}{2}$ ou $2a$, e as identidades que ainda subsistem.

Portanto, o arco a pode ser substituído pelo arco $\frac{a}{2}$ ou $2a$, e as identidades ainda subsistem.

$$\boxed{\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} \qquad (36)$$

$$\boxed{\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}} \qquad (37)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}} \qquad (38)$$

127. — Problema. — ***Dada*** $tg \frac{a}{2}$***; calcular sen a, cos a e tg a.*** — A fórmula (**38**) dá o valor pedido para $\operatorname{tg} a$.

Dividamos o 2.º membro de (**36**) pela expressão $\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$, igual a 1 como o prova a identidade (**12**), temos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}};$$

dividindo-se o numerador e o denominador por $\cos^2 \frac{a}{2}$; vem:

$$\boxed{\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.} \tag{39}$$

Do mesmo modo, empregando a fórmula (28), teremos:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}};$$

ou

$$\boxed{\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.} \tag{40}$$

Sinal único de sen a, cos a, tg a. — **Dado tg $\frac{a}{2}$, os arcos $\frac{a}{2}$ são todos determinados pela fórmula:**

$$\frac{a}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2};$$

$\frac{\alpha}{2}$ sendo o menor desses arcos e k qualquer inteiro, positivo, negativo ou nulo.

Os arcos a valerão:

$$a = 2k\pi + \alpha.$$

Todos esses arcos a terminam no mesmo ponto do círculo trigonométrico; logo, têm uma única função circular de cada espécie e não pode haver duplo sinal.

Conclusão. — ***Todas as funções circulares de um arco exprimem-se racionalmente em função da tangente da metade desse arco.***

128. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Sabendo-se que*** $tg\ x = m$, ***calcular*** $sen\ 2x$ ***e*** $cos\ 2x$.

1.° Temos **(28)**:

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x,$$

ou **(18)**:

$$\text{sen } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 x}} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 x}};$$

ou enfim:

$$\text{sen } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{2m}{1+m^2};$$

por causa de $\text{tg } x = m.$

A fórmula **(39)** daria mais ràpidamente o mesmo resultado.

2.° Temos **(29)**: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x,$

ou **(18)**:

$$\cos 2x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} - \frac{\text{tg } x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

por causa de $\text{tg } x = m.$

A fórmula **(40)** daria o mesmo resultado.

II. — ***Sabendo-se que*** $\text{tg } \frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3}$, ***calcular*** $\text{sen } x$ ***e*** $\cos x$.

As fórmulas **(38, 39 e 18)** dão:

$$\text{sen } x = \frac{2 \text{ tg } \frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2 \frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{-2(3-2\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})}.$$

ou, multiplicando-se em cima e em baixo por $2+\sqrt{3}$ para tornar o denominador racional:

$$\cos x = \frac{-2(3-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

III. — ***Conhecendo-se sen a*** $= \frac{4}{5}$, ***calcular sen 2a, cos 2a e tg 2a.***

A fórmula (**12**) dá:

$$\cos a = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}.$$

As fórmulas (**28, 29** e **13**) dão:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = \pm 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \pm\frac{24}{25};$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos a} = \mp\frac{24}{7}.$$

IV. — ***Verificar a identidade tg a + cotg a*** $= \frac{2}{\operatorname{sen} 2a}$.

O 1.º membro pode escrever-se:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} a + \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a}.$$

Por causa da relação (**24**) aplicada ao arco $2a$, temos:

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a},$$

donde

$$\frac{\operatorname{sen} 2a}{2} = \frac{\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a} \quad \text{e} \quad \frac{2}{\operatorname{sen} 2a} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a}.$$

Logo, o 1.º membro é idêntico ao segundo.

V. — ***Sabendo-se que tg a = 3, calcular sen 4 a.***

Aplicada ao arco $4a$, a fórmula (**24**) dá:

$$\operatorname{sen} 4a = \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1+\operatorname{tg}^2 2a}.$$

ou, por causa de (**38**) aplicada ao arco $2a$:

$$\operatorname{sen} 4a = \frac{\dfrac{4 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}}{1+\dfrac{4 \operatorname{tg}^2 a}{(1-\operatorname{tg}^2 a)^2}} = \frac{4 \operatorname{tg} a(1-\operatorname{tg}^2 a)}{(1-\operatorname{tg}^2 a)^2+4 \operatorname{tg}^2 a} = \frac{4.3(-8)}{64+36} = -\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{25}}.$$

129. — Divisão dos arcos. — Problema. — ***Calcular as funções circulares dos submúltiplos de um arco conhecendo-se as funções circulares desse arco.***

Os cálculos elementares ocupam-se apenas da bissecção do arco, a saber: conhecendo-se as funções circulares do arco a, calcular as do arco $\frac{a}{2}$.

Distinguiremos 3 casos mais frequentes.

130. — *Conhecendo-se* sen a, ***calcular*** sen $\frac{a}{2}$ ***e*** cos $\frac{a}{2}$.

Nas fórmulas (**12** e **28**) substituindo-se a, por $\frac{a}{2}$; tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} + \cos^2 \dfrac{a}{2} = 1; \\ 2 \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} - \cos \dfrac{a}{2} = \operatorname{sen} a. \end{cases} \qquad (\mathbf{a})$$

Somando-se e subtraindo-se membro a membro, vem o novo sistema:

$$\begin{cases} \left(\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} + \cos \dfrac{a}{2}\right)^2 = 1 + \operatorname{sen} a, \\ \left(\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} - \cos \dfrac{a}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} a. \end{cases}$$

ou, extraindo-se a raiz quadrada, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}. & \textbf{(b)} \\ \operatorname{sen}\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}. & \textbf{(c)} \end{array}\right.$$

Somando-se e subtraindo-se outra vez membro a membro e dividindo-se por **2**, vem:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a})} \qquad \textbf{(41)}$$

$$\boxed{\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}a})} \qquad \textbf{(42)}$$

Interpretação dos sinais. — Em cada uma das fórmulas (**41** e **42**), os sinais dos radicais são independentes uns dos outros; portanto, há 4 soluções reais para sen $\frac{a}{2}$ e 4 outras, de mesmo valor que as precedentes, para cos $\frac{a}{2}$.

Mas a equação (**a**) mostra que a um valor de sen $\frac{a}{2}$ corresponde apenas um valor para cos $\frac{a}{2}$; logo, cada solução de (**41**) corresponde sòmente a um valor de (**42**) e o sistema (**41** e **42**) não admite senão 4 soluções e não 16.

É fácil verificar esse resultado por meio do sistema (**b** e **c**), que se decompõe em 4 sistemas parciais, cada um admitindo apenas uma solução; resolvendo isoladamente cada um desses 4 sistemas de 2 equações deduzidas de (**b** e **c**), encontram-se as equações (**41** e **42**) e verifica-se que os sinais de uma mesma solução estão colocados em posições análogas nessas duas equações (em cima ou em baixo).

Explicação geométrica. — Dado sen a, os arcos a são determinados pelas fórmulas:

$$a = 2k\pi + a \quad \text{e} \quad a = (2k+1)\pi - a.$$

Os arcos $\frac{a}{2}$ valerão:

$$\frac{a}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Construamos esses arcos $\frac{a}{2}$. — 1.º. Os arcos $k\pi$ terminam todos em A ou A'; logo, os arcos $k\pi + \frac{\alpha}{2}$ terminam todos nas extremidades M e M' do diâmetro MM'. — 2.º Os arcos $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ terminam todos em B ou B'; logo, os arcos $(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ terminam no ponto N de modo que $AM = BN$, ou no ponto N' diametralmente oposto a N.

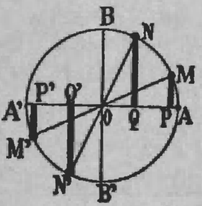

FIG. 99.

Portanto, haverá 4 senos MP, $M'P$, NQ e $N'Q'$, assim como 4 co-senos OP, OP', OQ e OQ', de valores reais, geralmente distintos, iguais 2 a 2 em valor absoluto e de sinais contrários.

Como os triângulos OMP e ONQ são iguais, assim como os triângulos $OM'P'$ e $ON'Q'$, os arcos terminados nas extremidades do diâmetro MM' têm seus senos e co-senos respectivamente iguais aos co-senos e senos dos arcos terminados nas extremidades do diâmetro NN'.

Solução única. — Se há 4 soluções possíveis quando se dá sen a, há apenas uma solução quando se dá o arco a.

Com efeito, o arco $\frac{a}{2}$ é completamente determinado e vê-se em que oitante (oitava parte da circunferência) está sua extremidade; notando-se que nos oitantes adjacentes ao eixo AA', o valor absoluto do co-seno é superior ao valor absoluto do respectivo seno, é fácil de se determinar o sinal dos primeiros membros de (**b** e **c**), a saber:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}, \\ \operatorname{sen}\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}, \end{cases}$$

e, portanto, o sinal de cada um dos radicais que lhes correspondem, a saber:

$$\begin{cases} \pm\sqrt{1+\text{sen } a}, \\ \pm\sqrt{1-\text{sen } a}. \end{cases}$$

Logo, o sistema (**41** e **42**) tem apenas uma solução e não há mais ambiguidade se o arco fôr conhecido.

131. — Conhecendo-se $\cos a$, **calcular** $\text{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\text{tg}\frac{a}{2}$.

Nas fórmulas (**12** e **29**), substituindo-se a por $\frac{a}{2}$; vem o sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} \cos^2\frac{a}{2} + \text{sen}^2\frac{a}{2} = 1, \\ \cos^2\frac{a}{2} - \text{sen}^2\frac{a}{2} = \cos a. \end{cases}$$

Somando-se e subtraindo-se membro a membro, obtem-se o novo sistema, de uso frequente:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}}, \\ \mathbf{1 - \cos a = 2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}}. \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} (43) \\ \text{e} \\ (44) \end{matrix}$$

Dividindo-se por 2 e extraindo-se a raiz quadrada, vem:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}, \\ \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}. \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} (45) \\ \text{e} \\ (46) \end{matrix}$$

Dividindo-se membro a membro essas 2 fórmulas, vem:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}} \qquad (47)$$

Interpretação dos sinais. — Para sen $\frac{a}{2}$ **(45)**, há 2 valores reais, iguais em valor absoluto e de sinais contrários; a função cos $\frac{a}{2}$ **(46)** admite também 2 valores reais, iguais em valor absoluto de sinais contrários e independentes dos de sen $\frac{a}{2}$; logo, cada valor de sen $\frac{a}{2}$ pode associar-se a cada valor de cos $\frac{a}{2}$ e há 4 soluções para o sistema **(45 e 46)**.

Há dois valores reais, iguais em valor absoluto e de sinais contrários para tg $\frac{a}{2}$ **(47)**.

Explicação geométrica. — Dado cos a, os arcos a são todos determinados pela fórmula:

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

sendo α o menor desses arcos e k qualquer inteiro.

Os arcos $\frac{a}{2}$ valerão:

$$\frac{a}{2} = k\pi \pm \frac{a}{2}.$$

Construamos esses arcos $\frac{a}{2}$. Os arcos $k\pi$ terminam todos nos pontos A ou A'; logo, os arcos $k\pi + \frac{\alpha}{2}$ terminarão todos nas extremidades M e M' de um mesmo diâmetro MM'; e os arcos $k\pi - \frac{\pi}{2}$ terminarão todos nas extremidades N e N' de um mesmo diâmetro NN' simétrico de MM' em relação a cada um dos eixos AA' e BB'.

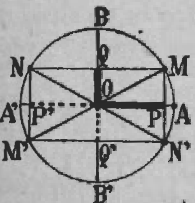

FIG. 99-bis.

Os arcos AM, AN, AM' e AN' têm senos iguais em valor absoluto, de sinal positivo para os 2 primeiros e de sinal negativo para os 2 últimos; os mesmos arcos têm co-senos iguais em valor absoluto, de sinal positivo para o 1.º, AM, e o 4.º, AN', e de sinal negativo para o 2.º e o 3.º, AN e AM'.

Os arcos AM e AM' têm mesma tangente positiva; os arcos AN e AN' têm também mesma tangente, mas negativa e de valor absoluto igual à precedente.

Há realmente 4 soluções para o grupo sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$, porque cada um dos valores de sen $\frac{a}{2}$ se associa a cada um dos valores de cos $\frac{a}{2}$; como se vê pelos sinais evidenciados no quadro seguinte:

	em M	em N	em M'	em N'
Sinal de sen $\frac{a}{2}$	+	+	—	—
Sinal de cos $\frac{a}{2}$	+	—	—	+

Solução única. — Se há 4 soluções para o grupo sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ quando se dá cos a, há apenas uma solução quando se conhece o próprio arco; com efeito, o arco $\frac{a}{2}$ é completamente determinado pelo quadrante onde esse arco termina e pode-se concluir o sinal de sen $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$ e tg $\frac{a}{2}$, rejeitando-se os outros sinais nas fórmulas (**45**, **46** e **47**).

132. — Conhecendo-se tg a, calcular tg $\frac{a}{2}$. — Na fórmula (**30**), substituindo-se a por $\frac{a}{2}$, temos:

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}};$$

expelindo-se os denominadores e ordenando-se no 1.º membro, vem:

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0; \qquad \text{(d)}$$

resolvendo esta equação do 2.º grau em $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, temos:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}} \qquad (48)$$

Discussão resumida. — Na equação (d), o produto das raizes é -1; logo, as duas raizes são sempre *reais*, de *sinais contrários e iguais* em valor absoluto.

Estas raízes podem variar de $-\infty$ até $+\infty$.

Explicação geométrica. — Dada tg a, todos os arcos a são determinados pela fórmula:

$$a = k\pi + \alpha,$$

onde α é o menor desses arcos e k qualquer inteiro.

Os arcos $\frac{a}{2}$ são:

$$\frac{a}{2} = k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Construamos esses arcos $\frac{a}{2}$. — 1.º os arcos $k\frac{\pi}{2}$ terminam todos nos pontos A, A', B e B' dos eixos retangulares AA' e BB'; — 2.º os arcos $k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ terminam todos nos pontos M, N, M' e N', de modo que

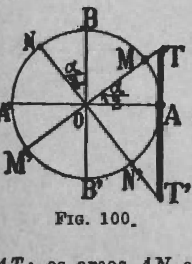

FIG. 100.

$$AM = BN = A'M' = B'N' = \frac{\alpha}{2}$$

Por conseguinte, MM' e NN' são dois diâmetros perpendiculares.

Os arcos AM e AM' têm mesma tangente AT; os arcos AN e AN' têm igualmente mesma tangente AT'.

O triângulo retângulo TOT', no qual a altura $OA = 1$, dá a relação

$$\overline{OA}^2 \quad \text{ou} \quad 1 = \overline{AT} \,.\, \overline{AT'};$$

logo, os valores absolutos dessas tangentes são recíprocos.

Como $\overline{AT}$ é positiva e $\overline{AT'}$ é negativa, temos:

$$\overline{AT} \,.\, \overline{AT'} = -1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \overset{\frown}{AM} \,.\, \operatorname{tg} \overset{\frown}{AN} = -1.$$

Solução única. — Se há 2 soluções possíveis para $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ quando se dá $\operatorname{tg} a$, existe apenas uma solução quando se conhece o arco a.

Com efeito, o arco $\frac{a}{2}$ é então completamente determinado, sabe-se em que quadrante está sua extremidade, que sinal terá $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ e, na equação (**d**), escolhe-se apenas a raiz que corresponde a esse sinal.

133. — Exercícios resolvidos. — *I. — Verificar as identidades seguintes:*

1.° $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{cosec} a - \operatorname{cotg} a;$

2.° $\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \operatorname{cosec} a + \operatorname{cotg} a;$

3.° $\operatorname{cotg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{a}{2} = 2 \operatorname{cotg} a;$

4.° $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{1+\cos 2a} \,.\, \frac{\cos a}{1+\cos 2a}.$

1.° O 2.° membro da 1.ª relação dá (**44, 28**):

$$\operatorname{cosec} a - \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} - \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2},$$

resultado idêntico ao 1.° membro.

2.º O 2.º membro da 2.ª relação dá **(43, 28)**:

$$\operatorname{cosec} a + \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} + \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1+\cos a}{\operatorname{sen} a}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{a}{2};$$

resultado idêntico ao 1.º membro.

3.º Na 3.ª relação, o 1.º membro dá **(37, 28)**:

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}} - \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\cos a}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} a} = \frac{2\cos a}{\operatorname{sen} a} = 2\operatorname{cotg} a,$$

resultado idêntico ao 2.º membro.

4.º As fórmulas **(28, 43)** dão:

$$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a,$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2},$$

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a;$$

a substituição no 2.º membro da relação 4.ª dá:

$$\frac{2\operatorname{sen} a \cos a}{2\cos^2 a} \times \frac{\cos a}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{sen} a}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{a}{a};$$

resultado idêntico ao 1.º membro.

II. — *Quais são, de 0° até 360°, os arcos que satisfazem à equação:*

$$\operatorname{sen}^2\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{4}?$$

Temos, por causa de (**12**):

$$\operatorname{sen}^2\frac{3x}{2} = 1 - \cos^2\frac{3x}{2}.$$

Substituindo este valor na equação proposta, vem:

$$1 - \cos^2\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$$

ou

$$4\cos^2\frac{3x}{2} + 4\cos\frac{3x}{2} - 3 = 0.$$

Tomando-se $\cos\frac{3x}{2}$ como incógnita auxiliar, pode-se escrever:

$$\cos\frac{3x}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3.4}}{4} = \frac{-2 \pm 4}{4}.$$

Regeitando-se o valor $-\frac{3}{2}$, tem-se:

$$\cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{2} = 60°.$$

A solução geral é (n.° 53)

$$\frac{3x}{2} = 2k\pi \pm 60°.$$

Fazendo-se, nesta equação, $k = 0, 1, 2, \ldots$ obtêm-se, nos limites indicados pelo enunciado, os arcos: **40°, 200°** e **280°.**

96. — Quadro das fórmulas relativas à multiplicação e a divisão dos arcos.

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \tag{28}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 \tag{29}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \tag{30}$$

$$\operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a} \tag{*}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad (46)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad (45)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} \qquad (47^*)$$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}} = \frac{1+\cos a}{\operatorname{sen} a} \qquad (^*)$$

A dedução das fórmulas assinaladas com o asterisco (*) é deixada como exercício para o estudante. O mesmo acontece com a segunda parte da fórmula 47 (ver exercício 99).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

92. — Se sen $a = 0{,}3$, calcular sen $2a$.

93. — Se cos $a = \frac{4}{5}$, calcular cos $2a$.

94. — Calcular sen $3a$ em função de sen a.

95. — Se cos $a = 0{,}9$, calcular cos $3a$.

96. — Exprimir tg 2θ em função de cos 4θ.
Sugestão: Na fórmula (47) fazer $a = 4\theta$.

97. — Exprimir sen$(2A-2B)$ em função de seno e co-seno de $(A-B)$.

98. — Em cada uma das equações seguintes, determinar um valor de θ sem auxílio das tábuas das funções circulares:

a) $2 \operatorname{sen} 20°10' \cos 20°10' = \operatorname{sen} \theta$.

b) $\cos 112°30' = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$.

99. — Demonstrar a identidade seguinte, deduzida por transformação do segundo membro da fórmula (47):

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

SUGESTÃO. — Multiplicar e dividir a fração submetida ao radical pelo fator $(1-\cos x)$.

100. — Demonstrar as identidades:

$$(a)\quad \operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

$$(b)\quad \cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2 x=2\cos^2 x-1.$$

101. — Quais são, de 0° até 360°, os arcos x que satisfazem a cada uma das equações seguintes:

(a) $\cos 2x-\operatorname{sen} x=0.$

(b) $(\operatorname{sen} 2x-1)(2\operatorname{sen} x+1)=0.$

(c) $\operatorname{sen} 3x\cos x+\cos 3x\operatorname{sen} x=0.$

102. — Calcular a menor determinação do arco x nas equações seguintes:

(a) $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

(b) $\operatorname{sen} 3x=5\operatorname{sen}\frac{3x}{2}.$

(c) $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x=0.$

103. — Calcular $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ para $a=45°$.

104. — Calcular as funções do arco de 15° por meio das funções do arco de 30°.

105. — Calcular tg 27°.

UNIDADE XII

LOGARITMOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

134. — Importância dos logaritmos. — Os logaritmos constituem um instrumento muito util para a redução do trabalho nos cálculos numéricos em que entram as seguintes operações: ***multiplicação, divisão, potenciação*** e ***radiciação.*** Nos cálculos em que entram funções trigonométricas, essas operações seriam sempre muito trabalhosas porque as funções trigonométricas são geralmente representadas por números decimais compreendendo de 4 a 8 algarismos decimais.

As fórmulas em que entram operações de soma ou de subtração de funções trigonométricas não são ***calculáveis por logaritmos.*** Por esse motivo veremos na unidade seguinte, como se pode, geralmente, substituir essas fórmulas por outras em que entrem operações calculáveis pelos logaritmos (fórmulas ***logarítmicas***).

135. — Tábuas de Logaritmos. — Assim como existem tábuas dos logaritmos dos números inteiros, também se calcularam os logaritmos das funções trigonométricas de grau em grau ou de minuto em minuto desde 0° até 90°.

A lista ordenada desses logaritmos constitui uma ***tábua de logaritmos das funções trigonométricas.*** Existem várias tábuas que dão esses logaritmos com diferentes graus de aproximação, conforme o grau de precisão necessária aos cálculos.

38°

'	SEN.	DIF.	TANG.	DIF. COM.	COTG.	COS.	DIF	'
0	Ī,789 3420	1616	Ī,892 8098	2604	0,107 1902	Ī,896 5321	987	60
1	5036	1616	Ī,893 0702	2604	0,106 9298	4334	988	59
2	6652	1614	3306	2603	6694	3346	988	58
3	8266	1614	5909	2602	4091	2358	989	57
4	Ī,789 9880	1613	Ī,893 8511	2603	0,106 1489	1369	990	56
5	Ī,790 1493	1611	Ī,894 1114	2601	0,105 8886	Ī,896 0379	990	55
6	3104	1611	3715	2602	6285	Ī,895 9389	991	54
7	4715	1610	6317	2601	3683	8398	992	53
8	6325	1608	Ī,894 8918	2601	0,105 1082	7406	992	52
9	7933	1608	Ī,895 1519	2600	0,104 8481	6414	992	51
10	Ī,790 9541	1607	4119	2600	5881	5422	993	50
11	Ī,791 1148	1606	6719	2600	3281	4429	994	49
12	2754	1605	Ī,895 9319	2599	0,104 0681	3435	995	48
13	4359	1604	Ī,896 1918	2599	0,103 8082	2440	995	47
14	5963	1603	4517	2599	5483	1445	995	46
15	7566	1602	7116	2598	2884	Ī,895 0450	997	45
16	Ī,791 9168	1601	Ī,896 9714	2598	0,103 0286	Ī,894 9453	996	44
17	Ī,792 0769	1600	Ī,897 2312	2598	0,102 7688	8457	998	43
18	2369	1599	4910	2597	5090	7459	998	42
19	3968	1598	Ī,897 7507	2597	0,102 2493	6461	998	41
20	5566	1597	Ī,898 0104	2596	0,101 9896	5463	1000	40
21	7163	1597	2700	2596	7300	4463	999	39
22	Ī,792 8760	1595	5296	2596	4704	3464	1001	38
23	Ī,793 0355	1594	Ī,898 7892	2595	0,101 2108	2463	1001	37
24	1949	1594	Ī,899 0487	2595	0,100 9513	1462	1001	36
25	3543	1592	3082	2595	6918	Ī,894 0461	1003	35
26	5135	1592	5677	2594	4323	Ī,893 9458	1002	34
27	6727	1590	Ī,899 8271	2594	0,100 1729	8456	1004	33
28	8317	1590	Ī,900 0865	2594	0,099 9135	7452	1004	32
29	Ī,793 9907	1589	3459	2593	6541	6448	1004	31
30	Ī,794 1496		Ī,900 6052		0,099 3948	Ī,893 5444		30
'	COS.	DIF.	COTG.	DIF. COM.	TANG.	SEN.	DIF.	'

51°

As grandes Tábuas dão com 7 decimais os logaritmos dos números de 1 até 100 000 e das funções circulares, segundo por segundo, para os 5 primeiros graus e de 10″ em 10″ para os outros graus.

As mais empregadas são as de *Callet, Dupuy, Schroon*; servem para os cálculos de grande precisão como os de astronomia e geodésia.

As pequenas Tábuas, geralmente com 5 decimais, dão os logaritmos dos números de 1 até 10 000 e das funções circulares de minuto em minuto; servem para os cálculos comuns, cujos dados têm apenas 3 ou 4 algarismos exatos.

136. — Disposições e uso das Tábuas. — Eis a disposição das Tábuas F. T. D. para as funções circulares; vão da página 78 à página 167 e dão, minuto por minuto, os logaritmos dos senos, co-senos, tangentes e co-tangentes dos arcos de 0° até 90°.

Quando inferiores a 45°, os arcos estão indicados acima das páginas, e os minutos se lem de cima para baixo, na 1.ª coluna, à esquerda de cada página.

Quando superiores a 45°, os arcos estão marcados em baixo das páginas e os minutos se lem de baixo para cima, na 1.ª coluna à direita de cada página.

Flechas colocadas junto aos números que indicam os graus, mostram em que sentido se devem ler os minutos.

Omitiram-se a característica e os 3 primeiros algarismos quando são comuns a vários logaritmos consecutivos; estes algarismos estão marcados apenas no primeiro e no último logaritmo que os contêm, assim como em cima e em baixo das colunas.

Colunas particulares dão as diferenças entre os logaritmos de dois arcos consecutivos da Tábua; para as tangentes e co-tangentes, as diferenças são iguais e estão marcadas numa coluna cujo título é ***Dif. com.*** ou ***diferenças comuns.***.

O uso das Tábuas mostra que:

1.º ***um ângulo é mais bem determinado pela tangente do que pelo seno ou pelo co-seno,*** porque a diferença tabular é maior entre os logaritmos das tangentes do que entre os correspondentes logaritmos dos senos ou logaritmos dos co-senos.

2.º ***Um ângulo vizinho de 90° é mal determinado pelo seno e um ângulo pequeno é mal determinado pelo co-seno,*** porque então as diferenças tabulares são muito pequenas.

3.º ***Dado pela tangente, um ângulo tem uma determinação tanto mais perfeita quanto mais se afasta de 45°,*** porque as diferenças tabulares crescem ràpidamente à partir de 45°.

No uso da Tábua de logaritmos das funções circulares há dois problemas a resolver:

1.º ***Achar o logaritmo de uma função circular dada;***

2.º ***Achar o arco correspondente a um logaritmo dado.***

Lembremos de passagem que os senos e as tangentes e, portanto, seus logaritmos crescem de 0° até 90° enquanto que os co-senos e as co-tangentes crescem de 0° até 90°.

137. — Achar o logaritmo de uma função circular dada. — Dois casos podem apresentar-se.

1.° caso. — ***O arco contém apenas graus e minutos.***

Lê-se logo o logaritmo nas Tábuas,

Temos, portanto, esrcevendo os algarismos subentendidos:

$$\log \text{ sen } 7^\circ\ 28' = \bar{1},113\ 7742$$
$$\log \text{ tang } 54^\circ\ 33' = 0,147\ 5339$$
$$\log \text{ cotg } 29^\circ\ 17' = 0,251\ 1987$$
$$\log \text{ cos } 78^\circ\ 7' = \bar{1},131\ 6976$$

2.° Caso. — ***O arco contém segundos, ou segundos e uma fração decimal de segundos.***

Seja achar o log de sen 64° 37′ 16″.

Temos logo: $\log \text{ sen } 64^\circ\ 37' = \bar{1},955\ 9089$

$\log \text{ sen } 64^\circ\ 38' = \bar{1},955\ 9689$

Assim como indica a Tábua, a diferença entre esses dois logaritmos é de 600 unidades da 7.ª ordem decimal.

Como as diferenças entre os logaritmos são sensìvelmente proporcionais às diferenças entre os arcos, pode-se raciocinar como segue:

Para 1′ ou 60″, o acréscimo do log. é de 600 unidades; para 1″ o acréscimo será 60 vezes menos, ou $\frac{600}{60}$, e para 16″, o acréscimo do log. será 16 vezes mais, ou $\frac{600 \times 16}{60} = 160.$

Portanto, temos:

$\log \text{ sen } 64^\circ\ 37'\ 16'' = \bar{1},955\ 9089 + 0,000\ 0160 = \bar{1},955\ 9249.$

Disposição do cálculo.

$$\begin{array}{lll} \log \text{ sen } 64^\circ\ 37' & = \bar{1},955\ 9089 & \text{Dif.} = 600 \\ \text{para} \hfill 16'' = & \underline{\hphantom{0,000}\ 160} & \\ \log \text{ sen } 64^\circ\ 37'\ 16'' & = \bar{1},955\ 9249 & \dfrac{600 \times 16}{60} = 160. \end{array}$$

Do mesmo modo, calcula-se o log de uma tangente, porque esse log cresce ao mesmo tempo que o arco.

138. — Seja calcular o log de cos $38^\circ\ 54'\ 13'',4$.

Nota-se que, se o arco cresce, o co-seno decresce.

Ora, temos: $\log \cos 38^\circ\ 54' = \bar{1},891\ 1153$

$\log \cos 38^\circ\ 55' = \bar{1},891\ 0133$

A diferença entre esses dois log é de 1020 unidades da 7.ª ordem decimal. Como para o seno, diremos:

Para 1′ ou 60″, o log. diminui de 1020 unidades; para 1″ diminuirá de 60 vezes menos ou $\frac{1020}{60}$; e para $13'',4$ diminuirá de $\frac{1020 \times 13,4}{60} = 227,8$; ou, em número inteiro, 228.

Portanto,

$$\log \cos 38^\circ\ 54'\ 13'',4 = \bar{1},891\ 1153 - 0,000\ 0228 =$$
$$= \bar{1},891\ 0925.$$

Disposição do cálculo.

$$\begin{array}{lrl}
\log \cos 38^\circ 54' & = \bar{1},891\ 1153 & \text{Dif.} = 1020 \\
\text{para} \qquad 13'',4 & = \qquad 228 & \dfrac{1020 \times 13,4}{60} = 227,8. \\
\hline
\log \cos 38^\circ 54'\ 13'',4 & = 1,891\ 0925 &
\end{array}$$

Do mesmo modo, calcula-se o log de uma cotg, porque esse log também cresce quando o arco cresce.

Observação. — Quando, nos cálculos, aparecem funções circulares ***negativas*** eis como se procede para o cálculo dos logaritmos:

Seja calcular $x = \text{tg } 30^\circ \text{ sen } 240^\circ$.

Temos $\qquad$ sen $240^\circ = \text{sen } (240^\circ - 180^\circ) = -\text{sen} 60^\circ$:

Fazendo $y = -x$, temos:

$y = \text{tg}\ 30° \ \text{sen}\ 60°$.

$\log y = \log \text{tg}\ 30 + \log \text{sen}\ 60° =$

$$\bar{1},761\,4394 + \bar{1},937\,5306 = \bar{1},698\,9700$$

donde $\qquad y = 0,5 \quad \text{e} \quad x = -0,5.$

Podemos, pois, adotar a regra seguinte: ***Para os cálculos que tenham funções circulares negativas, tomam-se os logaritmos das funções com os arcos correspondentes do 1.° quadrante e fazem-se os cálculos com esses logaritmos. No fim, multiplica-se o resultado por*** $(-1)^k$, ***k representando o número de funções circulares negativas que aparecem na expressão dada.***

139. — Achar o arco correspondente a um log dado. — Dois casos podem igualmente apresentar-se:

1.° caso. — ***O logaritmo dado encontra-se nas Tábuas.***

Basta então ler o arco correspondente.

É assim que vemos que:

log $\cos x = \bar{1},601\,8600$ provém do arco $x = 23°\ 34'$;
log $\cos x = 1,654\,8081$ provém do arco $x = 63°\ \ 9$;
log $\text{tg}\ x = 0,620\,7606$ provém do arco $x = 76°\ 32'$;
log $\cot x = 0,465\,9084$ provém do arco $x = 18°\ 53'$.

Nota. — Para facilitar essa indagação nas Tábuas, é preciso lembrar-se, como aliás se pode verificar na pág. 170:

1.° Que os senos dos arcos maiores do que 45° têm log maiores que $\bar{1},849\,4850$ e os co-senos desses mesmos arcos têm log menores do que $\bar{1},489\,4850$;

2.º Que as tangentes dos arcos maiores que 45º têm log maiores do que 0, e as co-tangentes desses mesmos arcos têm log menores do que 0.

2.º caso. — *O log dado não se acha nas Tábuas.*

Seja determinar x quando *log* sen $x = \bar{1},720\,7635$.

Como esse log é inferior a $\bar{1},849\,4850$, o arco x é inferior a 45º. Procura-se qual é o log que mais se aproxima de $\bar{1},720\,7635$; vê-se que é $\bar{1},720\,7538$, o qual corresponde ao arco de 31º 43′.

A diferença entre esse log e o que foi dado, é de 97 unidades da 7.ª ordem decimal; a diferença tabular entre os 2 log sucessivos que compreendem o ângulo dado, é de 2 043. Pode-se, pois, fazer o raciocínio seguinte:

Se 2 043 unidades correspondem a 1′ ou 60″ de arco. 1 unidade corresponderá a um arco 2 043 vezes menor, ou a $\frac{60}{2\,043}$; e 97 unidades corresponderão a um arco 97 vezes maior, ou a $\frac{60 \times 97}{2\,043} = 2'',8$, mais ou menos.

Temos portanto: $x = 31^\circ\ 43'\ 2'',8$.

Disposição do cálculo.

log sen $x = 1,720\,7635$

$$\begin{array}{lrr}
\text{para } \bar{1},720\,7538, \text{ o arco} = & 31^\circ\ 43' & \text{Dif.} - 2\,043 \\
\text{para} \qquad 97, \text{ o arco} = & 2'',8 & \dfrac{60 \times 97}{2\,043} = 2'',8. \\
\hline
x = & 31^\circ\ 43'\ 2'',8 &
\end{array}$$

O cálculo de um arco se obtém do mesmo modo quando se conhece o log da tg desse arco.

140. — Calcular x quando se conhece *log* cos $x = \bar{1},788\,5423$.

Nota-se que esse log é inferior a $\bar{1},849\,4850$; logo, x é superior a 45°.

Procura-se o log que mais se aproxime ***por excesso*** do log dado; acha-se $\bar{1},788\,6944$ que corresponde ao arco de $52^\circ\,4'$.

A diferença entre esse log e o que foi dado é de 1 521; a diferença tabular é de 1621. Pode-se dizer, portanto:

Se 1621 unidades correspondem a um arco de $1'$ ou de $60''$, uma unidade corresponderá a um arco 1621 vezes menor, ou a $\frac{60}{1621}$; e 1521 unidades corresponderão a um arco 1521 vezes maior, ou a $\frac{60 \times 1521}{1621} = 56'',3$.

Temos, pois: $x = 52^\circ\,4'56'',3$.

Disposição do cálculo.

$$
\begin{array}{llr}
log \cos x = \bar{1},788\,5423 & & \\
\text{para } \bar{1},788\,6944, & \text{o arco} = & 52^\circ\,4' \\
\text{para } \quad 1521, & \text{o arco} = & 56'',3 \\
\hline
 & x = & 52^\circ\,4'\,56'',3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{Dif.} = 1621 \\
\dfrac{60 \times 1521}{1621} = 56'',3.
\end{array}
$$

Do mesmo modo se obtém um arco quando se conhece o log da cotg desse arco.

Nota. — **É** sòmente para arcos maiores do que 2° que as diferenças entre os log são sensìvelmente proporcionais às diferenças entre os arcos. Por isso, o cálculo dos segundos pelas partes proporcionais pode ser feito sòmente além de 2°.

141. — Exercícios resolvidos. — I. — *Determinar a menor determinação do arco* **x** *na equação:*

$$\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}.$$

Tomando os logaritmos de ambos os membros, temos:

$$\log \operatorname{sen} x = \log 3 - \log 4.$$

CÁLCULO:

$$\log 3 = 0{,}477\ 1213$$

$$\operatorname{colog} 4 = \bar{1}{,}397\ 9400$$

$$\log \operatorname{sen} x = \bar{1}{,}875\ 0613 \qquad \text{Dif. tab.} = 1114$$

$$\log \operatorname{sen} 48^\circ 35' = \bar{1}{,}875\ 0142 \qquad \frac{60'' \times 471}{1114} = 25''$$

$$25'' \text{ para dif. } 471$$

$$x = \mathbf{48^\circ\ 35'\ 25''}.$$

II. — *Calcular o menor arco positivo que satisfaz à equação*

$$\cos x = -\frac{2}{3}.$$

Como o co-seno é negativo, o arco x termina no 2.º quadrante; seja y o seu suplemento; teremos:

$$\cos y = -\cos x = \frac{2}{3}; \quad \text{donde:} \quad \log \cos y = \log 2 - \log 3.$$

CÁLCULO:

$$\log 2 = 0{,}301\ 0300$$

$$\operatorname{colog} 3 = \bar{1}{,}522\ 8787$$

$$\log \cos y = \bar{1}{,}823\ 9087 \qquad \text{Dif. tab.} = 1413$$

$$\log \cos 48^\circ\ 11' = \bar{1}{,}823\ 9626 \qquad \frac{60'' \times 539}{1413} = 23''$$

$$23'' \text{ para dif. } 539$$

$$y = 48^\circ\ 11'\ 23'' \qquad x = 180^\circ - y = \mathbf{131^\circ\ 48'\ 37''}.$$

III. — *Calcular o menor arco positivo que dá*

$$\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{9}.$$

Tomando os logaritmos, temos: $\log \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \log 9.$

CÁLCULO: $\log 9 = 0{,}954\ 2425$

$$\log \operatorname{tg} x \text{ ou } \frac{1}{3} \log 9 = 0{,}318\ 0808 \qquad \text{Dif. tab.} = 3236$$

$$\log \operatorname{tg} 64^\circ\ 19' = 0{,}317\ 9368 \qquad \frac{60'' \times 1440}{3236} = 27''$$

$$27'' \text{ para dif. } 1440$$

$$x = 64^\circ\ 19'\ 27''$$

IV. — ***Resolver a equação seguinte e determinar os arcos por meio dos logaritmos:***

$$\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5.$$

Tomemos tg x como incógnita auxiliar. A equação pode escrever-se **(15)**:

$$\operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{tg} x} = 5$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 4 = 0.$$

Logo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Temos agora as duas equações:

$$(a) \quad \operatorname{tg} x = 4.$$

$$(b) \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

A equação (a) resolve-se como no exercício **(III)** e obtém-se

$$x = 75^\circ\ 57'\ 49'',5.$$

A equação (b) dá logo $x = 45^\circ$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

106. — Achar os logaritmos de:

(*a*) Sen $38^\circ\ 24'$.
(*b*) Sen $46^\circ\ 12'\ 26'',86$.
(*c*) Sen $82^\circ\ 0',34''$.
(*d*) Sen $0^\circ\ 32'\ 29'',16$.
(*e*) Sen $145^\circ\ 23'\ 12'',87$.
(*f*) Cos $35^\circ\ 27'$.
(*g*) Cos $46^\circ\ 12'\ 49'',77$.
(*h*) Cos $83^\circ\ 0'\ 58''$.
(*i*) Cos $1^\circ\ 28'\ 17''$.
(*j*) Cos $127^\circ\ 17'\ 20''$.

---

107. — Calcular os logaritmos de:

(*a*) Tg $28^\circ\ 11'$.
(*b*) Tg $44^\circ\ 59'\ 25'',37$.
(*c*) Tg $128^\circ\ 17'\ 30''$.
(*d*) Cotg $44^\circ\ 28'\ 19'',29$.
(*e*) Cotg $89^\circ\ 12'\ 32''$.
(*f*) Cotg $58'',7$.
(*g*) Cotg $130^\circ\ 0'\ 20''$.

108. — Achar os ângulos correspondentes a:

(*a*) $\log \operatorname{sen} x = \bar{1},696\ 7745.$

(*b*) $\log \operatorname{sen} x = \bar{2},746\ 8015.$

(*c*) $\log \operatorname{sen} x = \bar{1},786\ 7869.$

(*d*) $\log \cos x = \bar{1},991\ 6991.$

(*e*) $\log \cos x = \bar{3},456\ 4263.$

(*f*) $\log \operatorname{tg} x = 0,114\ 6511.$

(*g*) $\log \operatorname{cotg} x = 0,761\ 1282.$

(*h*) $\log \operatorname{cotg} x = 1,466\ 7888.$

109. — Nas equações seguintes, calcular a primeira determinação do ângulo x.

(*a*) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{3}.$

(*b*) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

(*c*) $\operatorname{sen} x = 3 \cos x.$

(*d*) $\operatorname{cosec} x = \dfrac{4}{3}.$

(*e*) $\sec^2 x = 3.$

(*f*) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{16}{15}.$

(*g*) $\sec x = \operatorname{sen} x + \cos x.$

(*h*) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1,14.$

110. — Resolver as equações logarítmicas seguintes:

(*a*) $\log (x+1) - \log x = \log 2.$

(*b*) $\log (5x+2) - \log (2x+3) = \log 2.$

(*c*) $\log x + \log \dfrac{2x}{3} = 3.$

111. — Resolver as equações exponenciais seguintes:

(*a*) $6^{x+1} = 40.$

(*b*) $6^{x} = (3,7)^{2x+1}.$

(*c*) $0,27^{x+1} = 0,8.$

(*d*) $2^{\operatorname{sen} x} = 1.$

UNIDADE XIII

TRANSFORMAÇÕES LOGARÍTMICAS

142. — Fórmula logarítmica. — Na maior parte dos cálculos práticos de *funções circulares* e outros um pouco complicados, empregam-se os logaritmos. Por isso, as tábuas dos senos, co-senos, tangentes e co-tangentes não dão essas funções mesmas, mas os seu logarítmos. Deste fato resulta que as fórmulas de cálculo não podem conter adições e subtrações, que não são calculáveis por logarítmos, mas apenas multiplicações, divisões, potenciações e radiciações.

Fórmula logarítmica é aquela que não tem mais adições ou subtrações; portanto é qualquer monômio.

Dado qualquer polinômio, *torná-lo calculável por logarítmos* é transformá-lo num monômio equivalente.

Esse resultado é alcançado por fórmulas de uso frequente e pelo emprego de ângulos auxiliares.

143. — Transformar em produto: sen $p \pm$ sen q e cos $p \pm$ cos q.

Façamos: $p = a + b$ e $q = a - b$;

vem: $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$.

Então

$$\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q = \operatorname{sen}(a+b) \pm \operatorname{sen}(a-b), \qquad (1)$$

e

$$\cos p \pm \cos q = \cos(a+b) \pm \cos(a-b). \qquad (2)$$

Por causa das fórmulas (**22** e **24**):

$$\text{sen}\ (a+b) = \text{sen}\ a \cos b + \cos a\ \text{sen}\ b,$$
$$\text{sen}\ (a-b) = \text{sen}\ a \cos b - \cos a\ \text{sen}\ b,$$

a fórmula (1) dá:

$$\text{sen}\ p + \text{sen}\ q = 2\ \text{sen}\ a \cos b,$$

e

$$\text{sen}\ p - \text{sen}\ q = 2 \cos a\ \text{sen}\ b;$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\ p + \text{sen}\ q &= 2\ \text{sen}\ \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ \text{sen}\ p - \text{sen}\ q &= 2 \cos \frac{p+q}{2}\ \text{sen}\ \frac{p-q}{2}, \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(\mathbf{49}) \\ &\text{e} \\ &(\mathbf{50}) \end{aligned}$$

Por causa das fórmulas (**23** e **25**):

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b,$$

e

$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b,$$

a fórmula (2) dá:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos a \cos b, \qquad (3)$$

e

$$\cos p - \cos q = -2\ \text{sen}\ a\ \text{sen}\ b, \qquad (4)$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ \cos p - \cos q &= -2\ \text{sen}\ \frac{p+q}{2}\ \text{sen}\ \frac{p-q}{2}. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(\mathbf{51}) \\ &\text{e} \\ &(\mathbf{52}) \end{aligned}$$

As fórmulas (**49, 50, 51, 52**) são logarítmicas e resolvem o problema. As duas primeiras ***substituem a soma de 2 senos pelo duplo produto de um co-seno*** *por um seno; a 3.ª substitui a soma de 2 co-senos pelo duplo produto de 2 co-senos; e a 4.ª substitui a diferença de 2 co-senos pelo duplo produto de 2 senos.*

Nota. — As fórmulas (3) e (4) podem escrever-se:

$$\boxed{\begin{aligned} &2 \cos a \cos b = \cos (a+b) + \cos (a-b), \\ &2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos (a-b) - \cos (a+b). \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} (53) \\ \text{e} \\ (54) \end{matrix}$$

Empregam-se para substituir um produto de 2 co-senos ou de 2 senos por uma soma ou diferença de co-senos.

144. — Transformar tg $a \pm$ tg b **e** cotg $a \pm$ cotg b.

Empregando-se as fórmulas (**13** e **14**) e somando-se as frações, vem:

1.º $$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}$$

ou $$\boxed{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} (a+b)}{\cos a \cos b}} \qquad (55)$$

2.º $$\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \pm \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = \frac{\cos a \operatorname{sen} b \pm \cos b \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

ou $$\boxed{\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{sen} (b \pm a)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.} \qquad (56)$$

145. — Emprego de ângulos auxiliares. — Dado um polimônio qualquer, é sempre possível torná-lo logarítmico pelo emprego de ângulo auxiliares.

Eis alguns casos:

I. — ***Dado o binômio*** **a ± b,** ***transformá-lo em produto.***

Factora-se um dos termos e vem um binômio começando por 1 que é preciso igualar a uma das seguintes expressões fáceis de tornar logarítmicas:

$$1 - \cos^2 \varphi, \qquad 1 \pm \cos \varphi,$$
$$1 + \text{tg}^2 \varphi, \qquad 1 \pm \text{tg} \varphi.$$

No caso atual, factorando-se a, vem:

$$a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

1.° — Se $\frac{b}{a}$ for menor do que 1 e precedido do sinal — pode-se fazer: $\frac{b}{a} = \cos^2 \varphi$, e temos (**12**):

$$a - b = a\,(1 - \cos^2 \varphi) = a \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

O ângulo φ é definido pela relação $\cos^2 = \frac{b}{a}$.

2.° — Se $\frac{b}{a}$ for menor que 1 e precedido de + ou de —, pode-se fazer: $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, e temos (**43, 44**):

$$a + b = a\,(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

ou $$a - b = a\,(1 - \cos \varphi) = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

3.° — No caso do sinal +, sejam quais forem a e b, pode-se fazer: $\frac{b}{a} = \text{tg}^2 \varphi$, e temos:

$$a + b = a(1 + \text{tg}^2 \varphi) = a \sec^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

4.° — Em todos os casos, pode-se fazer: $\dfrac{b}{a} = \text{tg}\ \varphi$ e temos:

$$a \pm b = a(1 \pm \text{tg}\ \varphi) = a\sqrt{2}\,\frac{\text{sen}\,(45° \pm \varphi)}{\cos \varphi}.$$

146. — ***Dado o polinômio a+b+c+d+..., transformá-lo em monômio equivalente.***

Por meio de um ângulo auxiliar, substitui-se o binômio $a+b$ por um monômio α; depois, por meio de um segundo ângulo auxiliar, substitui-se $\alpha+c$, ou $a+b+c$, por um monômio β; e assim por diante.

Havendo n termos no polinômio, serão precisos $n-1$ ângulos auxiliares.

O emprego dos ângulos auxiliares é um método geral; na prática, adotam-se processos mais simples. Seguem-se os casos mais notáveis:

1.° ***Tornar logarítmico*** $\sqrt{a^2+b^2}$.

Pode-se proceder como segue:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}; \quad \text{faz-se:} \quad \frac{b^2}{a^2} = \text{tg}^2\ \varphi,$$

vem:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\text{tg}^2\ \varphi} = a \sec \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

2.° ***Tornar logarítmico*** $\sqrt{a^2-b^2}$.

Se $a>b$, a expressão é real e pode-se proceder como segue:

$$\sqrt{a^2-b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad \text{faz-se:}\ \frac{b^2}{a^2} = \cos^2 \varphi;$$

vem;

$$\sqrt{a^2-b^2} = a\sqrt{1-\cos^2\varphi} = a \operatorname{sen} \varphi.$$

3.° ***Tornar logarítmico*** $\dfrac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}}$.

Divide-se o numerador e o denominador pelo termo a e faz-se $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ e vem (**n.° 122**):

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}} = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(45^\circ-\varphi).$$

4.° ***Tornar logarítmico a sen m ± b cos m.***

Factora-se a, faz-se $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ e vem:

$$a \operatorname{sen} m \pm b \cos m = a\left(\operatorname{sen} m \pm \frac{b}{a}\cos m\right)$$

$$= a\left(\operatorname{sen} m \pm \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\cos m\right)$$

$$= \frac{a(\operatorname{sen} m \cos\varphi \pm \operatorname{sen}\varphi \cos m)}{\cos\varphi}$$

ou $$a \operatorname{sen} m \pm b \cos m = \frac{a \operatorname{sen}(m\pm\varphi)}{\cos\varphi}.$$

5.° ***Sabendo-se que*** $\mathbf{a+b+c = 180^\circ}$, ***tornar logarítmico***

(a) $A = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c$

(b) $B = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c$

(c) $C = \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c$

(d) $D = -\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c$

A 1.ª condição dá:

$$c = 180^\circ - (a+b) \quad \text{e} \quad \frac{c}{2} = 90^\circ - \frac{a+b}{2};$$

donde: $\operatorname{sen} c = \operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos\frac{c}{2} = \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}$.

A 1.ª expressão torna-se então:

$$A = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(a+b).$$

Mas (**49, 28**):

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2};$$

donde:

$$A = 2 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right).$$

Mas:

$$\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}$$

e (**51**) $\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a-b}{2} = 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$;

logo:

$$A = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Do mesmo modo, temos:

$$B = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen}(a+b),$$

$$B = 2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right).$$

$$B = \text{sen } a + \text{sen } b - \text{sen } c = 4 \text{ sen } \frac{a}{2} \text{ sen } \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2};$$

um cálculo semelhante dá:

$$C = \text{sen } a - \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \text{ sen } \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \text{ sen } \frac{c}{2};$$

e

$$D = -\text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \cos \frac{a}{2} \text{ sen } \frac{b}{2} \text{ sen } \frac{c}{2}.$$

147. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Tornar calculável por logaritmos a expressão:***

$$\frac{\text{sen } q + \text{sen } q}{\text{sen } q - \text{sen } q}.$$

Dividindo-se membro a membro (**49**) por (**50**), vem:

$$\frac{\text{sen } p + \text{sen } q}{\text{sen } p - \text{sen } q} = \frac{2 \text{ sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \text{ sen} \frac{p-q}{2}}$$

ou simplificando-se:

$$\frac{\text{sen } p + \text{sen } q}{\text{sen } p - \text{sen } q} = \frac{\text{tg} \left(\frac{p+q}{2}\right)}{\text{tg} \left(\frac{p-q}{2}\right)} = \text{tg}\tfrac{1}{2}(p+q) \text{cotg}\tfrac{1}{2}(p-q).$$

II. — ***Tornar logarítmica a expressão:***

$$1 \pm \text{tg } a$$

Notando-se que $\text{tg } 45^\circ = 1$, e $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se: (**55**)

$$1 \pm \text{tg } a = \text{tg } 45^\circ \pm \text{tg } a = \frac{\text{sen } (45^\circ \pm a)}{\cos 45^\circ \cos a}$$

ou

$$1 \pm \text{tg } a = \frac{\sqrt{2} \text{ sen } (45^\circ \pm a)}{\cos a}.$$

III. — *Demonstrar a identidade seguinte:*

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Transformando-se o 1.º membro, obtém-se, **(52)** e **(51)**:

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x} = \frac{-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}{2 \cos 2x \operatorname{sen} (-x)}$$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x}{-2 \cos 2x \operatorname{sen} x}$$

$$= \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

EXERCICIOS PROPOSTOS

Tornar calculável por logarítmos:

111. — Sen 34° 24′ 12″—sen 12° 14′ 28″.

112. — Cos 28° 15′ 14″+cos 17° 53′ 29″.

113. — $\dfrac{\text{Sen } 52° \, 39' \, 24'' + \text{sen } 25° \, 28' \, 16''}{\text{Sen } 52° \, 38' \, 24'' + \text{sen } 25° \, 28' \, 16''}$

114. — Cotg 74° 28′ 14″—tg 18° 1′ 28″.

115. — 1—sen 24° 18′.

116. — $\dfrac{1 + \text{tg } 24° \, 16'}{1 - \text{tg } 24° \, 16'}$

117. — $\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$

118. — 1.º Tg a+sen a; 2.º tg a—sen a.

119. — 1.º 1+sen a+cos a; 2.º 1+sen a—cos a.

120. — Simplificar a expressão:

$$\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b.$$

121. — Simplificar a expressão:

$$\frac{\operatorname{sen} b \cos a \, (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)}{1 - \cos (a+b)} + \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\cos b \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}.$$

122. — Tornar logarítmica a expressão:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

123. — Tornar logarítmica a expressão:

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Verificar as identidades seguintes:

124. — (*a*) $\operatorname{Tg} \frac{a}{2} = \operatorname{cosec} a - \operatorname{cotg} a.$

125. — $\operatorname{Sen} (a+b) \operatorname{sen} (a-b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b.$

126. — $\operatorname{Sen}^2 (a+b) - \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sen} (2a+b) \operatorname{sen} b.$

127. — $\operatorname{sen} (a-b) + \operatorname{sen} (b-c) +$

$$\operatorname{sen} (c-a) + 4 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \operatorname{sen} \frac{c-a}{2} = 0;$$

128. — $\operatorname{Tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$

129. — $\operatorname{Sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$

130. — $\operatorname{Sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c = 4 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$

Identidades a verificar para $a + b + c = 90^\circ$.

131. — $\operatorname{Tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = 1.$

132. — $\operatorname{Cotg} a + \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c.$

133. — $\operatorname{Sen} 2a + \operatorname{sen} 2b + \operatorname{sen} 2c = 4 \cos a \cos b \cos c.$

134. — Verificar as seguintes relações para

$$a + b + c + d = 2\pi:$$

1.º $\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{a+c}{2};$

2.º $\cos a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c + \operatorname{sen} d = 4 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{a+c}{2}.$

135. — Calcular a menor determinação de x em cada uma das equações seguintes:

(*a*) $$\frac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 4x - \cos 2x} = 1.$$

(*b*) $$\cos 3x - \cos x = \operatorname{sen} x.$$

(*c*) $$\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 3x = \cos 4x.$$

UNIDADE XIV

RESOLUÇÃO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

148. — Resolução completa do triângulo retângulo. — Já na Unidade III, a simples definição das razões trigonométricas nos conduziu a um estudo elementar das propriedades trigonométricas dos triângulos retângulos. Vamos agora recomeçar esse estudo, aplicando-lhe as fórmulas de transformação e o cálculo logarítmico, visando obter fórmulas gerais e resultados mais precisos.

149. — Teoremas fundamentais. — 1.° Teorema. — ***Num triângulo retângulo, um cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto a este cateto ou pelo co-seno do ângulo adjacente.***

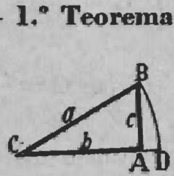

Fig. 101.

Seja o triângulo retângulo ABC; do centro C, com o raio CB, tracemos o arco BD; a definição do seno dá (n.° 67):

$$\text{sen } C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}; \qquad \text{donde: } c = a \text{ sen } C;$$

$$\text{e} \qquad \cos C = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a}; \qquad \text{donde: } b = a \cos C.$$

Como os ângulos B e C são complementares, temos ainda:

$$c = a \cos B \qquad \text{e} \qquad b = a \text{ sen } B.$$

Nota. — Observando-se que um cateto é a projeção ortogonal da hipotenusa sobre o eixo suporte desse mesmo cateto e aplicando o teorêma das projeções (n.º 117), obtemos logo as mesmas fórmulas:

$$\left.\begin{array}{ll} & b = a \cos C = a \operatorname{sen} B \\ \text{e} & c = a \cos B = a \operatorname{sen} C \end{array}\right\} \text{(1 bis), n.º 28}$$

2.º Teorema. — ***Num triângulo retângulo, um cateto é igual ao produto do outro cateto pela tangente do ângulo oposto ao cateto procurado ou pela co-tangente do ângulo adjacente.***

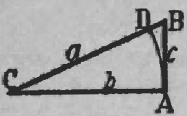

FIG. 102.

Seja o triângulo retângulo ABC; com centro em C, e raio CA, descrevamos o arco AD; a definição da tangente (n.º 68) dá:

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{CA} = \frac{c}{b}; \quad \text{donde:} \quad c = b \operatorname{tg} C.$$

Como os ângulos B e C são complementares, essa fórmula pode ainda escrever-se:

$$\left.\begin{array}{c} c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B \\ \text{Com o ângulo } B, \text{teriamos também:} \\ b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C \end{array}\right\} \begin{array}{l} (57) \\ \text{ou} \quad (2), \text{ n.º } 29. \end{array}$$

Notas. — 1.º Nas fórmulas (57):

$$c = a \operatorname{sen} C \quad \text{e} \quad b = a \cos C;$$

dividindo-se membro a membro, vem outra vez a fórmula (57):

$$\frac{c}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \operatorname{tg} C, \quad \text{ou} \quad c = b \operatorname{tg} C.$$

2.° Elevadas ao quadrado, as fórmulas (**57**) dão:

$$b^2 = a^2 \cos^2 C \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 C;$$

somando-se membro a membro, vem:

$$b^2 + c^2 = a^2 (\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) = a^2,$$

pois que $\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C = 1$ como o prova a fórmula (**12**).

É outra vez a relação dada pela geometria: $a^2 = b^2 + c^2$.

3.° Essas fórmulas servem para resolver qualquer triângulo retângulo.

150. — Casos principais. — Consideram-se 4 casos clássicos na resolução dos triângulos. Dados:

1.° a hipotenusa e um ângulo agudo (a e B);
2.° um cateto e um ângulo agudo (b e B);
3.° os dois catetos (b e c);
4.° a hipotenusa e um cateto (a e b).

1.° Caso. — ***Dados* a *e* B, *calcular* C, b, c *e* S.**

Por ser complemento de B, $C = 90° - B$.

O 1.° teorema (**54**) dá os catetos:

$$b = a \operatorname{sen} B \quad \text{e} \quad c = a \cos B.$$

A área em função dos catetos, tem por expressão:

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

Substituindo-se b e c e notando-se que $\operatorname{sen} 2B = 2 \operatorname{sen} B \cos B$ (**28**), temos:

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \cos B = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 2\,\mathbf{B}} \qquad (58)$$

2.° Caso. — *Dados* b *e* B, *calcular* C, a, c *e* S.

Por ser complemento de B. $C = 90° - B.$

O 1.° teorema dá: $b = a \operatorname{sen} B;$

donde $$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

O 2.° teorema dá:

$$c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} = b \operatorname{cotg} B.$$

A área $S = \frac{1}{2} bc$ dá, pela substituição de c:

$$S = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{cotg} B.$$

3.° Caso. — *Dados* b *e* c, *calcular* B, C, a *e* S.

As fórmulas (**2 bis**) dão os ângulos agudos:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}. \qquad (1)$$

A relação $a^2 = b^2 + c^2$ daria a; mas é preferível empregar a fórmula logarítmica: $a = \frac{b}{\cos C}$. Calcula-se o ângulo C por meio da equação (1).

Pelo processo do n.° 145, 3.°, é possível tornar logarítmica a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ e vem o resultado:

$$a = \frac{b}{\cos \varphi};$$

mas o ângulo φ é precisamente o ângulo C.

A área é $$S = \frac{1}{2} bc.$$

4.° Caso. — ***Dados* a *e* b, *calcular* B, C, c *e* S.**

As fórmulas (**1 bis**) dão: $\operatorname{sen} B = \cos C = \dfrac{b}{a}$.

O lado c é dado pela fórmula: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ que uma fácil decomposição torna logarítmica:

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

A área é:

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{b}{2}\sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Nota. — Quando b difere pouco de a, a razão $\dfrac{b}{a}$ difere pouco de 1; o ângulo B difere pouco de 90° e é mal determinado. O mesmo acontece com o ângulo C que difere pouco de 0°. Em lugar da fórmula

$$\cos C = \frac{b}{a},$$

é melhor escolher a fórmula (47)

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}$$

que nos dá, pela substituição de $\cos C$ por $\dfrac{b}{a}$:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}} \qquad (59)$$

O cálculo desta fórmula requer apenas os logaritmos de $(a-b)$ e de $(a+b)$ já empregados para calcular c e S.

151. — Exemplos numéricos. (1) — **1.° caso:**

$$\text{Dados} \left\{ \begin{array}{l} A = 90° \\ a = 2\,040 \text{ m.} \\ B = 32°\,51' \end{array} \right.$$

$$C = 90° - 32°\,51' = \mathbf{57°\,9'}.$$

Fórmulas

$b = a \text{ sen } B;$ $\qquad \log c = \log a + \log \cos B.$

$c = a \cos B;$ $\qquad \log c = \log a + \log \cos B.$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \text{ sen } B \cos B = \frac{1}{4} a^2 \text{ sen } B;$$

$$\log S = 2 \log a + \log \text{sen } B + \log \cos B - \log 2.$$

Cálculo de *b*.

$$\begin{array}{r} \log a = 3{,}309\ 6302 \\ \log \text{sen } B = \bar{1}{,}734\ 3529 \\ \hline \log b = 3{,}043\ 9831 \\ b = \mathbf{1\,106{,}58m.} \end{array}$$

Cálculo de *c*.

$$\begin{array}{r} \log a = 3{,}309\ 6302 \\ \log \cos B = \bar{1}{,}924\ 3277 \\ \hline \log c = 3{,}233\ 9579 \\ c = \mathbf{1\,713{,}79m.} \end{array}$$

Cálculo de *S*.

$$\begin{array}{r} 2 \log a = 6{,}619\ 2604 \\ \log \text{sen } B = \bar{1}{,}734\ 3529 \\ \log \cos B = \bar{1}{,}924\ 3277 \\ \text{colog } 2 = \bar{1}{,}698\ 9700 \\ \hline \log S = 5{,}976\ 9110 \\ S = \mathbf{948\,224m^2.} \end{array}$$

---

(1) Para a resolução aproximada e para *verificação* dos resultados é muito útil acostumar desde já o aluno ao uso da *Régua Logarítmica*. — Ver descrição e uso, pág. 361.

2.° Caso:

$$\text{Dados} \begin{cases} A = 90^\circ, \\ b = 754{,}5\text{m}, \\ B = 48^\circ\, 2^2. \end{cases}$$

$$C = 90^\circ - 48^\circ\, 2' = \mathbf{41^\circ\, 58'}.$$

Fórmulas

$$a = \frac{b}{\text{sen } B}; \qquad \log a = \log b - \log \text{sen } B.$$

$$c = b \text{ cotg } B; \qquad \log c = \log b + \log \text{cotg } B.$$

$$S = \frac{1}{2} b^2 \text{ cotg } B; \qquad \log S = 2 \log b + \log \text{cotg } B - \log 2.$$

Cálculo de *a*.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}877\ 6592 \\ \text{colog sen } B &= \underline{0{,}128\ 6992} \\ \log a &= 3{,}006\ 3584 \\ a &= \mathbf{1014{,}74m.} \end{aligned}$$

Cálculo de *c*.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}877\ 6592 \\ \log \text{ cotg } B &= \underline{\bar{1}{,}953\ 9293} \\ \log c &= 2{,}831\ 5885 \\ c &= \mathbf{678{,}56m.} \end{aligned}$$

Cálculo de *S*.

$$\begin{aligned} 2 \log b &= 5{,}755\ 3184 \\ \log \text{ cotg } B &= \bar{1}{,}953\ 9293 \\ \text{colog } 2 &= \underline{\bar{1}{,}698\ 9700} \\ \log S &= 5{,}408\ 2177 \\ S &= \mathbf{255\ 987m^2.} \end{aligned}$$

3.° Caso:

$$\textbf{Dados} \begin{cases} A = 90^\circ, \\ b = 286\text{m}, \\ c = 321\text{m}. \end{cases}$$

Fórmulas

$\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c};$	$\log \operatorname{tg} B = \log b - \log c.$
$a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}..$	$\log a = \log b - \log \operatorname{sen} B.$
$S = \dfrac{1}{2} bc;$	$\log S = \log b + \log c - \log 2.$

Cálculo de *B*.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}456\ 3660 \\ \operatorname{colog} c &= \bar{3}{,}493\ 4950 \\ \hline \log \operatorname{tg} B &= \bar{1}{,}949\ 8610 \\ B &= \mathbf{41^\circ\ 41'\ 59'',\ 8.} \\ C &= \mathbf{48^\circ\ 18'\ \ 0'',\ 2.} \end{aligned}$$

Cálculo de *a*.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}456\ 3660 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} B &= 0{,}177\ 0284 \\ \hline \log a &= 2{,}633\ 3944 \\ a &= \mathbf{429{,}927m.} \end{aligned}$$

Cálculo de *S*.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}456\ 3660 \\ c &= 2{,}506\ 5050 \\ \operatorname{colog} 2 &= \bar{1}{,}698\ 9700 \\ \hline \log S &= 4{,}661\ 8410 \\ S &= \mathbf{45\ 903m^2.} \end{aligned}$$

4.° Caso:

$$\text{Dados} \begin{cases} A = 90^\circ, \\ a = 490\text{m.}, \\ b = 382{,}5\text{m.} \end{cases}$$

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)},\ \log c = \frac{1}{2}\,[\log\,(a+b) + \log\,(a-b)].$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},\ \log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\,[\log\,(a-b) - \log\,(a+b)].$$

$$S = \frac{1}{2}bc, \qquad \log S = \log b + \log c - \log 2.$$

Cálculos auxiliares: $a+b = 872{,}5\text{m}$; $a-b = 107{,}5\text{m}$.

Cálculo de *c*.

$$\begin{aligned} \log\,(a+b) &= 2{,}940\ 7654 \\ \log\,(a-b) &= \underline{2{,}031\ 4085} \\ 2\log c &= 4{,}972\ 1739 \\ \log c &= 2{,}486\ 0870 \\ c &= \mathbf{306{,}258m.} \end{aligned}$$

Cálculo de *C*.

$$\begin{aligned} \log\,(a-b) &= 2{,}031\ 4085 \\ \text{colog}\,(a+b) &= \underline{\bar{3}{,}059\ 2346} \\ 2\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}090\ 6431 \\ \log \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \bar{1}{,}545\ 3216 \\ \frac{C}{2} &= 19^\circ\ 20'\ 30'' \\ C &= \mathbf{38^\circ\ 41'.} \\ B &= \mathbf{51^\circ\ 19'.} \end{aligned}$$

Cálculo de *S*.

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}582\ 6314 \\ \log c &= 2{,}486\ 0870 \\ \text{colog}\ 2 &= \underline{\bar{1}{,}698\ 9700} \\ \log S &= 4{,}767\ 6884 \\ S &= \mathbf{58\ 571{,}8m^2.} \end{aligned}$$

152. — Problemas resolvidos. — I. — ***De um navio, vê-se, sob um ângulo de elevação de 13° 52′, o vértice de um farol distante de 300 m. Qual é a altura do farol acima do nível do mar?***

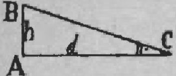

FIG. 103.

Seja AB o farol de altura h, C o ângulo de elevação e $d=AC$ a distância do navio ao pé do farol. O triângulo retângulo ABC dá:

$$h=d \operatorname{tg} C.$$

Essa equação permite calcular h. Temos logo:

$$\log h=\log d+\log \operatorname{tg} C.$$

$$\begin{aligned} \log d &= 2{,}477\ 1213 & d &= 300\text{m}. \\ \log \operatorname{tg} C &= \bar{1}{,}392\ 4466 & C &= 13°\ 52' \\ \hline \log h &= 1{,}869\ 5679 \\ h &= \mathbf{74{,}0573m}. \end{aligned}$$

II. — ***Achar o lado de um polígono regular de 18 lados inscrito num círculo de 6,70m de raio.***

Seja $AB=a$ o lado procurado; o ângulo central O é $\dfrac{360}{18}=20°$; o apótema MO é a bissectriz desse ângulo O e o triângulo retângulo MBO dá:

$$MB=\frac{a}{2}=r \operatorname{sen}\frac{O}{2}; \quad \text{donde:} \quad a=2r \operatorname{sen}\frac{O}{2}.$$

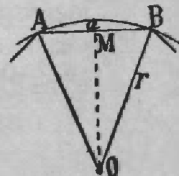

FIG. 104.

Essa equação permite calcular a.

Tomando-se os logaritmos dos dois membros, vem:

$$\log a=\log 2+\log r+\log \operatorname{sen}\frac{O}{2}.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}301\ 0300 & r &= 6{,}70\text{m}. \\ \log r &= 0{,}826\ 0748 \\ \log \operatorname{sen}\frac{O}{2} &= \bar{1}{,}239\ 6702 & \frac{O}{2} &= 10°. \\ \hline \log a &= 0{,}366\ 7750 \\ a &= \mathbf{2{,}3269m.} \end{aligned}$$

III. — ***Do alto B de uma torre de 58 m de altura, observam-se dois objetos C e D em linha horizontal com a base da torre e os raios visuais fazem, com a horizontal, ângulos de depressão de 45° 46′ e 30° 13′. Calcular a distância dos dois objetos.***

Seja a torre AB de altura h, m a distância horizontal AD, n a distância AC e x a distância CD procurada.

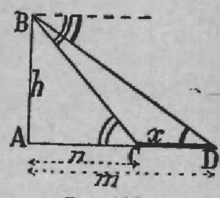

FIG. 105.

Temos: $x = m - n$.

Os triângulos retângulos BAD e BAC dão:

AD ou $m = h \cot g\, D$,
AC ou $n = h \cot g\, C$.

Logo (56):

$$x = m - n = h\ (\text{cotg}\ D - \text{cotg}\ C) = h \frac{\text{sen}\ (C - D)}{\text{sen}\ C\ \text{sen}\ D}.$$

Pelos logaritmos temos o cálculo seguinte:

$\log x = \log h + \log \text{sen}\ (C-D) - \log \text{sen}\ C - \log \text{sen}\ D$.

$\log h = 1{,}763\ 4280$		$h = 58$ m.
$\log \text{sen}\ (C-D) = \bar{1}{,}428\ 2631$		$C = 45^\circ\ 46'$
$\text{colog sen}\ C = 0{,}144\ 7808$		$D = 30^\circ\ 13'$
$\text{colog sen}\ D = 0{,}298\ 1978$		$C - D = 15^\circ\ 33'$
$\log x = 1{,}634\ 6\ 97$		
$x =$ **43,1191m.**		

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

136. — Resolver os triângulos retângulos seguintes: (Calcular também a área S).

(a) Dados: $a = 878{,}92$; $B = 31^\circ\ 23'\ 17'', 8$.
(b) Dados: $a = 5724{,}19$; $b = 3518{,}45$.
(c) Dados: $b = 1801{,}79$; $B = 47^\circ\ 17'\ 18'', 3$.
(d) Dados: $b = 824{,}289$; $c = 628{,}451$.
(e) Dados: $c = 120$; $\frac{b}{a} = 0{,}6$.
(f) Dados: $a = 630$; $B - C = 6^\circ\ 18'\ 16''$.

137. — Resolver um trângulo retângulo conhecendo-se a e o produto bc.

138. — Achar o comprimento de uma reta a que faz um ângulo de $22^\circ 40'$ com sua projeção ortogonal cujo comprimento tem 16,64m.

139. — Determinar o ângulo que o sol faz com o horizonte quando a sombra de um estilete vertical é o dobro da altura do estilete.

140. — Calcular o volume de um cone reto no qual o raio da base tem 1 m e o ângulo da aresta com a base 27° 17′.

141. — Calcular um arco de círculo, sabendo que a corda que o subtende iguala os 3/5 do diâmetro.

142. — Achar a área S de um polígono regular de n lados em função do raio R do círculo circunscrito.

143. — O raio da superfície dos mares, suposta a terra esférica, é de 6 366 198m. Pergunta-se a que distância pode extender-se no mar a vista de um observador colocado a 50m acima do nível do oceano?

144. — Um avião ruma para Oeste com a velocidade de 150 milhas por hora. O vento sopra do Norte com a velocidade de 20 milhas.

Calcular a *rota*, a *deriva* e a *velocidade* do avião em relação ao solo. (Ver, n.° 25, (e).

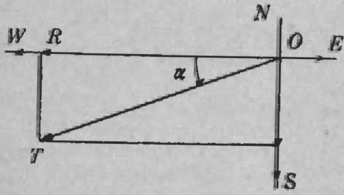

Fig. 106.

OW = rumo.
OT = rota.
α = deriva.
$\overrightarrow{OT}$ = velocidade resultante.

145. — Que velocidade deve ter o vento para que um avião que toma o rumo Norte, siga uma rota 205° quando o vento sopra de Oeste com uma velocidade de 30 milhas por hora?

146. — Uma lancha a motor que tem uma velocidade de 25 km em água parada, atravessa, perpendicularmente às margens, um rio em que as águas têm uma velocidade de 8 km/h. Calcular tante da lancha. (Fig. 107).
tante da lancha.

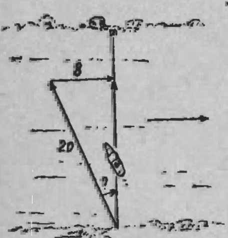

Fig. 107.

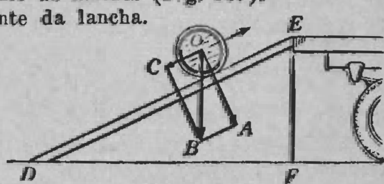

Fig. 108.

147. — Um carregador deseja embarcar um tonel de 200 kg sobre um caminhão de 1,5m de altura. Que comprimento deverá ter o plano inclinado utilizado para que o carregador exerça nesse trabalho uma força de 80 kg paralelamente ao plano inclinado? (Fig. 108).

UNIDADE XV

RESOLUÇÃO DO TRIÂNGULO OBLIQUÂNGULO

153. — Resolução de um triângulo. — ***Resolver*** um triângulo é calcular os elementos desconhecidos em função de alguns elementos dados. Conforme os dados do problema distinguiremos os 4 casos possíveis:

I. ***Dados: um lado e dois ângulos quaisquer.***
II. ***Dados: dois lados e o ângulo que eles formam.***
III. ***Dados: os três lados.***
IV. ***Dados: dois lados e o ângulo oposto a um deles.***

Uma vez determinados os 6 elementos de um triângulo, deve-se proceder à ***verificação*** dos resultados. Utilizam-se para esse fim fórmulas que encerrem os 6 elementos do triângulo. Se os resultados forem certos, a substituição numérica desses 6 elementos na fórmula de verificação deve conduzir a uma identidade.

Eis os teoremas fundamentais em que se baseia a resolução dos triângulos obliquângulos.

154. — Teorema I. — ***Num triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.***

Seja o triângulo ABC, de alturas BD ou h e AE ou h' (fig. 109).

Nos triângulos retângulos ABD e CBD, temos:

$$h = c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C;$$

donde vem:

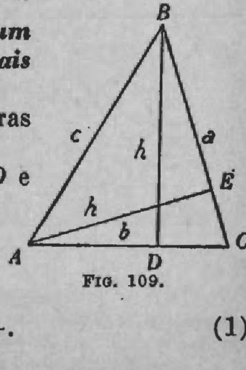

FIG. 109.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}. \qquad (1)$$

Por causa dos triângulos retângulos ABE e ACE, temos:

$$h' = b \text{ sen } C = c \text{ sen } B;$$

donde vem:
$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

Escrevendo a igualdade entre as relações (1) e (2) que têm um membro comum, vem:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}} \qquad (60)$$

Temos ainda a relação entre os ângulos de um triângulo: $A + B + C = 180°$.

155. — Teorema II. — ***Num triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros lados menos o duplo produto desses lados pelo coseno do ângulo que formam.***

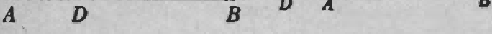

FIG. 110.

Seja o triângulo ABC e CD ou h a altura abaixada do vértice C.

1.° Se o ângulo A for agudo, teremos (*Geom.*, n.° 283):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD.$$

Ora, o triângulo retângulo ADC dá: $AD = b \cos A$; logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2.° Se o ângulo A for obtuso, teremos (*Geom.*, n.° 284):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD.$$

Mas o triângulo retângulo ADC dá:

$$AD = b \cos CAD.$$

Como os ângulos A e CAD são suplementares (n.º 78):

$$\cos CAD = -\cos A;$$

donde $$AD = -b \cos A,$$

e a relação (1) vem a ser:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Os outros lados dão relações análogas:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C \end{aligned}} \qquad (61)$$

156. — Fórmulas de resolução. — 1.º Caso. — *Dados* a, A *e* B, *calcular* C, b, c *e* S.

As 3 incógnitas C, b e c, são dadas pelas relações (60):

$$A + B + C = 180^\circ,$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C};$$

donde tiramos:

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \quad \text{e} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A}$$

Como C deve ser positivo, é preciso que $A+B<180^\circ$ para que o problema seja possível; satisfeita essa condição, há uma solução e só uma.

157. — Área. — A área é dada pela fórmula: $S = \frac{ab}{2}$;

mas o triângulo retângulo ADB dá: $h = c$ sen B; donde vem, substituindo-se c pelo valor acima:

$$S = \frac{ac \text{ sen } B}{2} = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{2 \text{ sen } A}$$

e, notando-se que:

$$C = 180° - (A+B) \quad \text{e} \quad \text{sen } C = \text{sen } (A+B).$$

vem:

$$\boxed{S = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen}(A+B)}{2 \text{ sen } A}} \qquad (62)$$

158. — 2.° Caso. — ***Dados* a, b *e* C, *calcular* A, B, c *e* S.**

As 3 incógnitas A, B, c, são ainda determinadas pelas 3 relações (**60**):

$$A + B + C = 180°,$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Em primeiro lugar, calculam-se os ângulos A e B; a 1.ª equação dá a soma desses ângulos:

$$A + B = 180° - C.$$

Se calcularmos a diferença $(A - B)$ desses mesmos ângulos, será fácil, depois, determiná-los.

Para calcularmos $(A - B)$ tomemos a 1.ª relação dos senos que dá sucessivamente:

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } A + \text{sen } B} = \frac{a-b}{a+b}$$

ou (n.º 147, I):

$$\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{a-b}{a+b}$$

mas

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{tg}(90^\circ\ \tfrac{1}{2}\ C) = \text{cotg } \tfrac{1}{2}\ C;$$

e a relação precedente vem a ser:

$$\boxed{\text{tg}\tfrac{1}{2}\left(A-B\right) = \frac{a-b}{a+b}\ \text{cotg } \tfrac{1}{2}\ C} \qquad (63)$$

Esta equação nos dará a diferença dos ângulos dados, ou $(A-B)$.

Sejam agora:

$$A + B = \alpha$$
$$\text{e} \quad A - B = \beta.$$

Este sistema nos dará logo os ângulos A e B; temos:

$$A = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \quad \text{e} \quad B = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Depois de calculados os ângulos A e B, obtém-se o lado c pela fórmula:

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}. \qquad (1)$$

Podemos sempre designar pela letra a o maior lado dado; teremos então $a > b$; e, também, $A > B$; e a fórmula **(63)** dá para $\frac{1}{2}(A-B)$ apenas um valor positivo inferior a 90°; o de c é positivo e o problema admite sempre uma solução.

159. — Outro cálculo de c. — Eis outro modo de calcular c.

A relação dos senos dá:

$$\frac{c}{a+b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}=\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)};$$

podemos exemplificar porque $A+B=180^{\circ}-C$,

$\frac{1}{2}(A+B)=90^{\circ}-\frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)=\cos \frac{1}{2} C$,

e vem:

$$\boxed{c=(a+b) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}} \qquad (64)$$

Por meio desta fórmula apenas 2 logaritmos novos são necessários, ao passo que a fórmula **(1)** requer 3, diferentes daqueles da fórmula **(63)**.

160. — Verificação. — Fórmulas de Mollweide. — A verificação dos resultados obtidos na resolução dos triângulos obliquângulos pode ser feita mediante a fórmula **(64)**, que se escreve então na forma:

$$\frac{c}{a+b}=\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

ou pela fórmula **(64, bis)**

$$\frac{c}{a-b}=\frac{\cos \frac{1}{2} C}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}$$

que é deduzida de forma análoga.

São as fórmulas de ***Mollweide*** [1].

Estas duas fórmulas exprimem relações que devem existir entre os 6 elementos de todo triângulo.

A verificação dos resultados pode ainda ser feita pelo emprego de uma fórmula que nos dá um dos elementos conhecidos do problema, em função dos elementos calculados. A substituição, nessas fórmulas, dos elementos calculados, deve conduzir ao elemento conhecido pelos dados do problema.

Para fins de verificação utilizam-se frequentemente as ***fórmulas de Mollweide*** ou a **Relação dos senos** (**60**).

161. — Área. — ***A área de um triângulo iguala o semi-produto de 2 lados pelo seno do ângulo que formam.***

Seja o triângulo ABC, de altura $h = CD$ e de base $AB = c$ (fig. 110). A área é dada pela fórmula:

$$S = \frac{1}{2}ch.$$

Mas os triângulos CDA e CDB dão:

$$h = b \text{ sen } A = a \text{ sen } B;$$

logo:

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{bc} \textbf{ sen } \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{ac} \textbf{ sen } \mathbf{B}.} \qquad (65)$$

A altura correspondente ao lado a ou b, daria ainda:

$$S = \frac{1}{2}ab \text{ sen } C.$$

---

(1) Karl Mollweide, matemático alemão — 1808.

162. — 3.° Caso. — *Dados* a, b *e* c, *calcular* A, B, C *e* S.

Os 3 ângulos são determinados pelas 3 fórmulas (**61**); por exemplo, a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$

dá:
$$\cos A = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}.$$

Essa fórmula permite calcular o ângulo A. Mas como não é calculável por logaritmos, é preciso transformá-la em monómio. Eis o processo.

1.° A relação (**43**):

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \cos A,$$

dá aqui:

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc+b+c^2-a^2}{2\,bc};$$

ou

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c)^2-a^2}{2\,bc} = \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2\,bc};$$

logo:
$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4\,bc}};$$

Designando-se o perímetro do triângulo por $2p$, temos:

$$a+b+c = 2p,$$
$$b+c-a = a+b+c-2a = 2(p-a),$$
$$a-b+c = a+b+c-2b = 2(p-b),$$
$$a+b-c = a+b+c-2c = 2(p-c),$$

Logo: $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

Do mesmo modo se deduzem $\cos \frac{1}{2} B$ e $\cos \frac{1}{2} C$. E temos as fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned}} \qquad (66)$$

2.º Da mesma forma, a relação (**44**):

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \cos A.$$

dá aqui:

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc};$$

ou

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc};$$

logo: $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4\,bc}}$;

ou $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

De modo análogo se deduzem $\operatorname{sen} \frac{1}{2} B$ e $\operatorname{sen} \frac{1}{2} C$.

E obtemos as fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}} \\ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{ac}} \\ \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{ab}} \end{aligned} \qquad (67)$$

3.° Dividindo-se membro a membro as fórmulas correspondentes dos grupos (**66**) e (**67**, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}} \end{aligned} \qquad (68)$$

Num triângulo, a metade de um ângulo é sempre inferior a 90°; logo, o 1.° membro dessas 9 fórmulas é positivo e os radicais admitem apenas o sinal +.

Cada uma das 9 fórmulas requer o cálculo de 4 logaritmos; o grupo (**66**) exige 7 assim como o grupo (**67**), mas o grupo (**68**) se resolve apenas com 4; logo, para se calcular um ângulo é indiferente tomar qualquer fórmula; mas para se calcularem os 3 ângulos, o grupo (**68**) dá menos trabalho; aliás esse grupo (**68**) é preferivel porque um ângulo é geralmente mais bem determinado pela tangente do que pelo seno ou pelo co-seno.

163. — Outra expressão de tg ½ A. — Seja r o raio do círculo inscrito. A geometria ensina que a área de um ângulo iguala o semi-perímetro desse triângulo multiplicado pelo raio do círculo inscrito, ou $S = pr$; (393, 5.°, Geom., C. Sup.);

donde $$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

e as fórmulas (**68**) vêm a ser:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

ou

igualmente

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \frac{r}{p-a} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \frac{r}{p-b} \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \frac{r}{p-c} \end{aligned}} \qquad (69)$$

Quando se conhece r, essas fórmulas são muito cômodas para a resolução completa do triângulo.

Ver o exemplo resolvido, pág. 213 — 3.° caso.

164. — Área. — A área de um triângulo é dada pela fórmula: $S = \frac{1}{2}ab$ sen C. A fórmula (**65**) dá substituindo-se sen C por 2 ½ C cos ½ (**28**):

$$S = ab \text{ sen } \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C.$$

Substituindo-se sen ½ C e cos ½ C por seus valores (**66** e **67**), vem:

$$S = ab\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2}}$$

ou

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \qquad (70)$$

É outra vez o resultado obtido pela geometria (*Geom., c. sup.*, n.° 393, 7.°).

165. — Discussão. — Para que o problema seja possível, é preciso que os ângulos A, B e C estejam compreendidos entre 0° e 180° e suas metades $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$ e $\frac{1}{2}C$ compreendidos entre 0° e 90°; essas condições podem ser examinadas com auxílio das fórmulas (**66, 67** e **68**).

Vejamos com as fórmulas (**68.**).

As fórmulas das tg. dão como condição necessária e suficiente que:

$$0° < \tfrac{1}{2} < 90°$$

ou:

$$0 < \text{tg}\tfrac{1}{2}A < \infty$$

ou:

$$0 < \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} < \infty.$$

A segunda desigualdade é sempre verificada, porque o denominador nunca é nulo nem o numerador é infinito; e a 1.ª vem a ser, elevando-se ao quadrado (pois que o radical é positivo):

$$\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)} > 0;$$

multiplicando-se o numerador e o denominador por $p\,(p-a)$, afim de tornar o denominador quadrado (porque assim a condição dependerá apenas do numerador) temos:

$$p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)>0;$$

como p é sempre positivo, a desigualdade reduz-se a:

$$(p-a)\,(p-b)\,(p-c)>0.$$

Essa relação requer 2 factores negativos ou 3 factores positivos; mas é impossível que 2 factores sejam negativos juntamente, porque a soma de 2 quaisquer desses 3 factores vale a, b ou c e é positiva; logo, o único caso possível é que tenhamos ao mesmo tempo:

	$p-a>0$;	donde vem:	$a<b+c$;
	$p-b>0$;	donde vem:	$b<a+c$;
e	$p-c>0$;	donde vem:	$c<a+b$.

É o resultado já encontrado em geometria, isto é: cada lado deve ser menor do que a soma dos dois outros.

As fórmulas (**66**) e (**67**) conduziriam a um resultado idêntico.

166. — 4.° Caso. — *Dados* a, b, *e* A, *calcular* B, C, c *e* S.

De $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B}$ tira-se: $\text{sen } B = \dfrac{b \text{ sen } A}{a}$. (1)

De $A+B+C = 180°$, tira-se: $C = 180°-(A+B)$. (2)

De $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$ tira-se: $c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$. (3)

Como no 2.° caso, a área é dada pela fórmula:

$$S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C. \qquad (4)$$

167. — Discussão. — Como em geometria (c. sup., n.° 190), esse caso precisa de interpretação, porque a fórmula (1) dá sen B, e a um seno correspondem 2 ângulos suplementares, B' e B''; é preciso examinar se esses 2 valores de B podem ser aceitos. Distinguiremos 3 hipóteses possíveis: $a>b$, $a=b$ e $a<b$.

1.º $a>b$. — Então a geometria (*c. sup.*, n.º 55) dá também: $A>B$; logo, B há de ser agudo, seja qual for o valor de A, obtuso ou agudo; há, pois, uma única solução para B, assim como para C e c.

2.º $a=b$. — Neste caso a geometria (**c. sup.**, n.º 30) dá: $A=B$; logo, o triângulo é isósceles e os ângulos A e B hão de ser agudos, porque não podem ser obtusos os ângulos iguais de um triângulos isósceles; nessa hipótese, há apenas uma solução para B, assim como para C e c.

3.º $a<b$. — Neste caso temos: (***geom.***, ***c. sup.***, n.º 55) $A<B$ e poderemos ter: $A \geqq 90°$ e $A<90°$.

Se $A \geqq 90°$, o valor de B, superior ao de A, impossibilita a construção do triângulo e não há solução, para o problema.

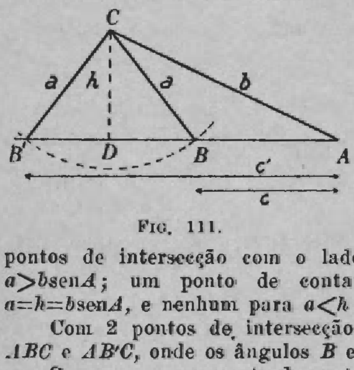

FIG. 111.

Se $A<90°$, haverá 2 soluções, ou uma só ou nenhuma.

Com efeito: seja o triângulo ABC (fig. 111), onde temos $b>a$ e $A<90°$.

Do vértice C como centro, com o raio a, descrevamos um arco de círculo: haverá 2 pontos de intersecção com o lado AB, em B e B' se $a>h$ ou $a>b\operatorname{sen}A$; um ponto de contato apenas, o ponto D, para $a=h=b\operatorname{sen}A$, e nenhum para $a<h$ ou $a<b\operatorname{sen}A$.

Com 2 pontos de intersecção, há dois triângulos aceitáveis: ABC e $AB'C$, onde os ângulos B e B' são suplementares.

Com apenas um ponto de contacto, há sòmente uma solução: o triângulo retângulo ADC.

Com nenhum ponto comum, não há solução.

São os mesmos resultados da geometria (*c. sup.*, n.º 190). Vêm resumidos no quadro abaixo:

$$\text{Para}\left\{\begin{array}{lll} a>b;\ \text{é preciso } A>B & \text{e há} & 1 \text{ solução} \\ a=b;\ \text{é preciso } A=B & \text{e há} & 1 \text{ solução} \\ a<b\left\{\begin{array}{l} \text{e } A \geqq 90° \\ \\ \text{e } A<90° \end{array}\right. & \begin{array}{l} \\ \left\{\begin{array}{l} a>b \operatorname{sen} A \\ a=b \operatorname{sen} A \\ a<b \operatorname{sen} A \end{array}\right. \end{array} & \begin{array}{l} 0 \text{ solução} \\ 2 \text{ soluções} \\ 0 \text{ solução} \\ 1 \text{ solução} \end{array} \end{array}\right.$$

Este caso apresenta, pois, ***ambiguidade*** na solução.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

1.º Caso.

$$\text{Dados} \begin{cases} a = 172\text{m.} \\ A = 113^\circ\, 45' \\ B = 35^\circ\, 18' \end{cases}$$

$$C = 180^\circ - (113^\circ\, 45' + 35^\circ\, 18') = \mathbf{30^\circ\, 57'}.$$

Fórmulas

$$c = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}; \qquad \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - \log \operatorname{sen} A.$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}; \qquad \log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A.$$

$$S = a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} 2A};$$

$$\log S = 2 \log a + \log \operatorname{sen} B + \log \operatorname{sen} C - \log 2 - \log \operatorname{sen} A.$$

Cálculo de b.

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}235\ 5285 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}761\ 8208 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= 0{,}038\ 4311 \\ \hline \log b &= 2{,}035\ 7804 \\ b &= \mathbf{108{,}588m.} \end{aligned}$$

Cálculo de c.

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}235\ 5285 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}711\ 2080 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= 0{,}038\ 4311 \\ \hline \log c &= 1{,}985\ 1676 \\ c &= \mathbf{96{,}6424m.} \end{aligned}$$

Cálculo de S.

$$\begin{aligned} 2 \log a &= 4{,}471\ 0570 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}761\ 8208 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}711\ 2080 \\ \operatorname{colog} 2 &= \bar{1}{,}698\ 9700 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= 0{,}038\ 4311 \\ \hline \log S &= 3{,}681\ 4869 \\ S &= \mathbf{4802{,}72m^2.} \end{aligned}$$

Verificação

A fórmula (**64**) dá:

$$\frac{96{,}6424}{172 + 108{,}588} = \frac{\operatorname{sen} 15^\circ\, 28'\, 30''}{\cos 39^\circ\, 13'\, 30''}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{colog}\ 280{,}588 &= 3{,}551\ 9309 \\ \log\ 96{,}6424 &= \bar{1}{,}985\ 1677 \\ \hline & \bar{1}{,}537\ 0986 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \operatorname{sen} 15^\circ\, 28'\, 30'' &= \bar{1}{,}426\ 2148 \\ \log \cos 39^\circ\, 13'\, 30'' &= 0{,}110\ 8840 \\ \hline & \bar{1}{,}5370988 \end{aligned}$$

2.° Caso

$$\text{Dados}\begin{cases} a = 217{,}20\text{m.} \\ b = 154{,}90\text{m.} \\ C = 47^\circ. \end{cases}$$

$$\text{Fórmulas}\begin{cases} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}. \\ c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \quad \text{ou ainda} \quad c = (a+b)\dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \\ S = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} C. \end{cases}$$

Cálculo de A e de B.

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \log (a-b) + \log \operatorname{cotg}\frac{C}{2} - \log (a+b).$$

$$\begin{aligned} \log (a-b) &= 1{,}794\ 4881 \\ \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C &= 0{,}361\ 6981 \\ \operatorname{colog} (a+b) &= \underline{\bar{3}{,}429\ 3403} \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) &= \bar{1}{,}585\ 5265 \\ \tfrac{1}{2}(A-B) &= 21^\circ\ 3'\ 35'' \\ 90 - \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2}(A+B) &= 66^\circ\ 30' \end{aligned}$$

$a-b = 62$ m. 30.

$\frac{1}{2} C = 23^\circ\ 30'$

$a + b = 372$ m. 10

$A = \mathbf{87^\circ\ 33'\ 35''}$ $\qquad$ $B = \mathbf{45^\circ\ 26'\ 25''}$

Cálculo de c.

$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}336\ 5898 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}864\ 1275 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= \underline{0{,}000\ 3940} \\ \log c &= 2{,}201\ 3813 \\ c &= \mathbf{158{,}994m^2}. \end{aligned}$$

Cálculo de C.

$\log S = \log a + \log b + \log \operatorname{sen} C - \log 2$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}336\ 8598 \\ \log b &= 2{,}190\ 0514 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}\ 864\ 1275 \\ \operatorname{colog} 2 &= \underline{\bar{1}{,}698\ 9700} \\ \log S &= 4{,}090\ 0087 \\ S &= \mathbf{12\ 302{,}9m^2}. \end{aligned}$$

Verificação

$$\frac{158{,}994}{372{,}10} = \frac{\operatorname{sen} 23^\circ\ 30'}{\cos 21^\circ\ 03'\ 35''}$$

$$\begin{aligned} \log 158{,}994 &= 2{,}201\ 3806 \\ \operatorname{colog} 372{,}10 &= \underline{\bar{3}{,}429\ 3403} \\ &\ \bar{1}{,}630\ 7209 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \operatorname{sen} 23^\circ 30' &= \bar{1}{,}600\ 6997 \\ \operatorname{colog} \cos 21^\circ 3'35'' &= \underline{0{,}030\ 0223} \\ &\ \bar{1}{,}630\ 7220 \end{aligned}$$

3.° Caso

$$\text{Dados} \begin{cases} a = 250\text{m.} \\ b = 390\text{m.} \\ c = 180\text{m.} \end{cases}$$
$$2p = 820\text{m.}$$

Cálculos auxiliares

$p = 410$
$p—a = 160$
$p—b = 20$
$p—c = 230$

$\text{colog}\, p = \bar{3},387\ 2161$
$\log p—a = 2,204\ 1200$
$\log p—b = 1,301\ 0300$
$\log p—c = 2,361\ 7278$

$2 \log r = 3,254\ 0939$
$\log r = 1,627\ 0470$

$\log p = 2,612\ 7839$

1.° Método

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p—b)\ (p—c)}{p\ (p—a)}};$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p—a)\ (p—c)}{p\ (p—b)}};$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p—a)\ (p—b)}{p\ (p—c)}};$$

$$S = \sqrt{p\ (p—a)\ (p—b)\ (p—c)}.$$

2.° Método

$$r = \sqrt{\frac{(p—a)\ (p—c)\ (p—c)}{p}}$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{p—a};$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2} B = \frac{r}{p—b};$$

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2} C = \frac{r}{p—c}.$$

$$S = pr.$$

Cálculo de *A*. (1.° Método)

$\log (p—bQ = 1,301\ 0300$
$\log (p—c) = 2,361\ 7278$
$\text{colog}\, p = \bar{3},387\ 2161$
$\text{colog}\ (p—a) = \bar{3},795\ 8800$

$2 \log\ \text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \bar{2},845\ 8539$

$\log\ \text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \bar{1},422\ 9270$
$\tfrac{1}{2} A = 14^\circ\ 49'\ 54'',5$
$A = \mathbf{29^\circ\ 39'\ 49''}$

Cálculo de *A*. (2.° Método)

$\log r = 1,627\ 0470$
$\text{colog}\ (p—a) = \bar{3},795\ 8800$

$\log\ \text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \bar{1},422\ 9270$
$\tfrac{1}{2} A = 14^\circ\ 49'\ 54'',5$
$A = \mathbf{29^\circ\ 39'\ 49''}$

Cálculo de *B*.

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 2{,}204\ 1200\\
\log(p-c) &= 2{,}361\ 7278\\
\operatorname{colog} p &= \bar{3}{,}387\ 2161\\
\operatorname{colog}(p-b) &= \underline{\bar{2}{,}698\ 9700}\\
2\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B &= 0{,}652\ 0339\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B &= 0{,}326\ 0170\\
\tfrac{1}{2}B &= 64^\circ\, 43'\, 50'',2\\
B &= \mathbf{129^\circ\, 27'\, 40'',4}
\end{aligned}$$

Cálculo de *B*.

$$\begin{aligned}
\log r &= 1{,}627\ 0470\\
\operatorname{colog}(p-b) &= \underline{\bar{2}{,}698\ 9700}\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B &= 0{,}326\ 0170\\
\tfrac{1}{2}B &= 64^\circ\, 43'\, 50'',2\\
B &= \mathbf{129^\circ\, 27'\, 40'',4}
\end{aligned}$$

Cálculo de *C*.

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 2{,}204\ 1200\\
\log(p-b) &= 1{,}301\ 0300\\
\operatorname{colog} p &= \bar{3}{,}387\ 2161\\
\operatorname{colog}(p-c) &= \underline{\bar{3}{,}638\ 2722}\\
2\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C &= \bar{2}{,}530\ 6383\\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C &= \bar{1}{,}265\ 3192\\
\tfrac{1}{2}C &= 10^\circ\, 26'\, 15'',3\\
C &= \mathbf{20^\circ\, 52'\, 30''.6}
\end{aligned}$$

Cálculo de *C*.

$$\begin{aligned}
\log r &= 1{,}627\ 0470\\
\operatorname{colog}(p-c) &= \underline{\bar{3}{,}638\ 2722}\\
\log \tfrac{1}{2}C &= \bar{1}{,}265\ 3192\\
\tfrac{1}{2}C &= 10^\circ\, 26'\, 15''\ 3\\
C &= \mathbf{20^\circ\, 52'\, 30'',6}
\end{aligned}$$

Cálculo de *S*.

$$\begin{aligned}
\log p &= 2{,}612\ 7839\\
\log(p-a) &= 2{,}204\ 1200\\
\log(p-b) &= 1{,}301\ 0300\\
\log(p-c) &= \underline{2{,}361\ 7278}\\
2\log S &= 8{,}479\ 6617\\
\log S &= 4{,}239\ 8309\\
S &= \mathbf{17\,371{,}24m^2}
\end{aligned}$$

Cálculo de *S*.

$$\begin{aligned}
\log p &= 2{,}612\ 7839\\
\log r &= \underline{1{,}627\ 0470}\\
\log S &= 4{,}239\ 8309\\
S &= \mathbf{17\,371{,}24m^2}
\end{aligned}$$

Verificação:

$$\begin{aligned}
A &= 29^\circ\, 39'\, 49''\\
B &= 129^\circ\, 27'\, 40'',4\\
C &= \underline{20^\circ\, 52'\, 30'',6}\\
A+B+C &= \mathbf{180^\circ\ 0'\ 0''}
\end{aligned}$$

4.º Caso:

Dados $\begin{cases} a = 120\text{m.} \\ b = 150\text{m.} \\ A = 52^\circ\ 16' \quad (a<b;\ A<90^\circ;\ a>b \text{ sen } A:\ \text{ha 2 soluções}). \end{cases}$

Fórmulas $\begin{cases} \text{sen } B = \dfrac{b \text{ sen } A}{a}; \\ C = 180^\circ - (A+B); \\ c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}; \\ S = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C. \end{cases}$

Cálculo de *B*.

$\log b = 2{,}176\ 0913$

$\log \text{sen } A = \bar{1}{,}898\ 1038$

$\text{colog } a = \bar{3}{,}920\ 8187 \qquad \log a = 2{,}079\ 1813$

$\log \text{sen } B = \bar{1}{,}995\ 0138$

$B' = \mathbf{81^\circ\ 20'\ 3'',8} \qquad B'' = \mathbf{98^\circ\ 39'\ 56'',2}$

$C' = \mathbf{46^\circ\ 23'\ 56'',2} \qquad C'' = \mathbf{29^\circ\ 4'\ 3'',8}$

Cálculo de *c* (1.ª *Solução*).

$\log a = 2{,}079\ 1813$

$\log \text{sen } C = \bar{1}{,}859\ 8340$

$\text{colog sen } A = 0{,}101\ 8962$

$\log c = 2{,}040\ 9115$

$c = \mathbf{109{,}8782m.}$

Cálculo de *c* (2.ª *Solução*).

$\log a = 2{,}079\ 1813$

$\log \text{sen } C = \bar{1}{,}686\ 4960$

$\text{colog sen } A = 0{,}101\ 8962$

$\log c = 1{,}867\ 5735$

$c = \mathbf{73{,}718m.}$

Cálculo de *S* (1.ª *Solução*).

$\log a = 2{,}079\ 1813$

$\log b = 2{,}176\ 0913$

$\log \text{sen } C = \bar{1}{,}859\ 8340$

$\text{colog } 2 = \bar{1}{,}698\ 9700$

$\log S = 3{,}814\ 0766$

$S = \mathbf{6517{,}433m.^2}$

Cálculo de *S* (2.ª *Solução*).

$\log a = 2{,}079\ 1813$

$\log b = 2{,}176\ 0913$

$\log \text{sen } C = \bar{1}{,}686\ 4960$

$\text{colog } 2 = \bar{1}{,}698\ 9700$

$\log S = 3{,}640\ 7386$

$S = \mathbf{4372{,}588m^2.}$

Deixamos ao aluno, como exercício, a verificação destas duas soluções.

169. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Num triângulo equilátero, calcular a soma:***

$$\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C.$$

Temos **(21)**: $\text{sen}\, 60^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}}$; logo, $\text{sen}^2 60^\circ = \frac{3}{4}$;

Como os 3 ângulos A, B e C são iguais, a soma pedida é

$$\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C = \frac{9}{4}.$$

II. — ***Resolver um triângulo, sabendo que os lados formam uma progressão aritmética de razão 1 e o maior ângulo é o dobro do menor.***

Seja x o lado médio; os lados são $(x-1)$, x e $(x+1)$.

Seja y o menor ângulo; o maior é $2y$ e o médio é $(180^\circ-3y)$, conforme os dados do problema.

Como os ângulos e lados opostos se correspondem em relação às suas grandezas, a fórmula **(60)** dá:

$$\frac{x-1}{\text{sen}\, y} = \frac{x}{\text{sen}\, 3y} = \frac{x+1}{\text{sen} 2y},$$

porque $\text{sen}\,(180^\circ-3y) = \text{sen}\, 3y$.

Essas 2 equações são suficientes para se calcular x e y.

O 1.º e o 3.º membro, dão a equação:

$$\frac{x-1}{\text{sen}\, y} = \frac{x+1}{\text{sen}\, 2y} \qquad (1)$$

à qual vamos associar a relação **(61)**:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

para não termos que desenvolver o denominador sen $3y$.

Teremos aqui:

$$(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) \cos y \qquad (2)$$

A equação (1) vem a ser:

$$\frac{x-1}{\text{sen}\, y} = \frac{x+1}{2\, \text{sen}\, y \cos y};$$

donde:

$$\cos y = \frac{x+1}{2\,(x-1)}. \qquad (3)$$

Substituindo em (2) temos:

$$(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2 - \frac{x(x+1)^2}{x-1};$$

ou

$$x = 5.$$

Os 3 lados são **4, 5** e **6.**

O valor de y é dado pela equação (3), que vem a ser para $x=5$:

$$\cos y = \frac{3}{4}.$$

Cálculo de y**:**

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0{,}477\ 1213 \\ \operatorname{colog} 4 &= \bar{1}{,}397\ 9400 \\ \hline \log\cos y &= \bar{1}{,}875\ 0613 \\ y &= \mathbf{41^\circ\, 24'\, 34'',6.} \end{aligned}$$

Os outros ângulos são: $180^\circ - 3y = \mathbf{55^\circ\, 46'\, 16'',2}$

e $2y = \mathbf{82^\circ\, 49'\ \ 9'',2.}$

III. — Designando-se por R o raio do círculo circunscrito a um triângulo qualquer ABC, demonstrar a relação:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Seja o triângulo ABC, R o ráio do círculo circunscrito e OD a perpendicular abaixada do centro O sobre o lado BC (fig. 112).

O ângulo central BOC é o dobro do ângulo inscrito BAC; logo, o ângulo DOB é igual ao ângulo A.

O triângulo retângulo DOB dá:

$$DB \text{ ou } \frac{a}{2} = R \operatorname{sen} DOB = R \operatorname{sen} A;$$

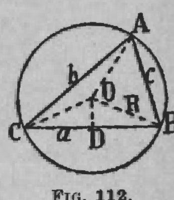

FIG. 112.

donde vem:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R.$$

De modo análogo obtemos as relações:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = 2R \quad \text{e} \quad \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

É mais uma demonstração da relação dos senos (**60**).

IV. — ***Num triângulo, demonstrar a identidade:***

$$\operatorname{sen}(B-C) + b \operatorname{sen}(C-A) + c \operatorname{sen}(A-B) = 0.$$

Sabemos pelo problema anterior que:

$$a = 2R \operatorname{sen} A; \quad b = 2R \operatorname{sen} B \quad \text{e} \quad c = 2R \operatorname{sen} C.$$

Substituindo-se a, b e c, por esses valores, temos:

$$x = 2R\,[\operatorname{sen} A \operatorname{sen}(B-C) + \operatorname{sen} B \operatorname{sen}(C-A) + \operatorname{sen} C \operatorname{sen}(A-B)];$$

mas $\qquad 180^\circ = A+B+C;$

donde vem:

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B+C); \ \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+C); \ \operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(A+B);$$

o primeiro membro da identidade vem a ser:

$$2R\,[\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{sen}(B-C) + \operatorname{sen}(A+C)\operatorname{sen}(C-A) + \\ + \operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(A-B)] \qquad (1)$$

mas

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(B+C)\operatorname{sen}(B-C) = \\ &= \operatorname{sen} B \cos C + \cos B \operatorname{sen} C)(\operatorname{sen} B \cos C - \cos B \operatorname{sen} C) \\ &= \operatorname{sen}^2 B \cos^2 C - \cos^2 B \operatorname{sen}^2 C \\ &= \operatorname{sen}^2 B (1 - \operatorname{sen}^2 C) - (1 - \operatorname{sen}^2 B) \operatorname{sen}^2 C \\ &= \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C. \end{aligned}$$

Igualmente teremos:

$$\operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(C-A) = \operatorname{sen}^2 C - \operatorname{sen}^2 A,$$

e

$$\operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B;$$

substituindo em (1) vem:

$$2R\,(\operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C + \operatorname{sen}^2 C - \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B) = \mathbf{0}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

148. — Resolver o triângulo e calcular a sua área:

Dados:	**Resultados:**
$a = 798{,}325\text{m}$	$A = 72^\circ\,33'\,13'',1.$
$B = 40^\circ\,7'\,34'',9$	$b = 539{,}31.$
$C = 67^\circ\,19'\,12''$	$c = 772{,}11.$
	$S = 198\,626\text{m}^2.$

Fazer a verificação do resultado por meio da fórmula da área em que entram os elementos procurados

$$S = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A.$$

149. — Resolver o triângulo com os dados seguintes:

$$a = 3\,429{,}71; \quad b = 2\,743{,}632; \quad c = 68^\circ\, 25'\, 34'',69.$$

Verificar os resultados com a área calculada:

$$S = 4\,376\,328.$$

150. — Dados: $a = 24{,}67$; $b = 35{,}43$; $c = 39{,}04$. Calcular os ângulos A, B e C e verificar o resultado pela igualdade $A + B + C = 180^\circ$.

151. — Resolver um triângulo com os dados seguintes:

$$a = 534{,}62; \quad b = 345{,}18; \quad A = 58^\circ\, 17'\, 36''.$$

Verificar os resultados pela fórmula de Mollweide.

152. — Resolver um triângulo conhecendo:

(a) os ângulos A, B, C e uma altura h_a.

(b) a área S e os ângulos A e B.

153. — Resolver um triângulo conhecendo o perímetro $2p$ e os três ângulos.

154. — Calcular c em um triângulo no qual $C = 49^\circ\, 51'\, 20''$; $a = 625$m; $b = 532$m.

155. — Demonstrar a fórmula de Euler:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{tg } \tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{tg } \tfrac{1}{2}(B+C)}.$$

156. — Demonstrar que entre os ângulos de um triângulo existe a relação:

$$\text{sen } A - \text{sen } B + \text{sen } C = 4 \text{ sen } \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2} B \text{ sen } \tfrac{1}{2} C.$$

Escrever também as duas outras relações análogas.

UNIDADE XVI

APLICAÇÕES BASEADAS NA RESOLUÇÃO DO TRIÂNGULO OBLIQUÂNGULO

170. — ***De um ponto accessível* C, *medir a distância a outro ponto inaccessível* A.**

No terreno accessível (fig. 113) mede-se uma base *CD*, horizontal, e, quanto possível, aproximadamente perpendicular a *AC*. Medem-se os ângulos *ACD* e *ADC* do triângulo *CAD*. Conhecem-se, agora, um lado e os dois ângulos adjacentes (1.° Caso, n.° 156). Teremos:

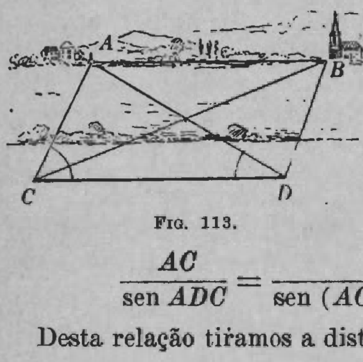

FIG. 113.

$$\frac{AC}{\text{sen } ADC} = \frac{CD}{\text{sen } (ACD + ADC)}.$$

Desta relação tiramos a distância pedida, *AC*.

171. — ***Medir a distância de dois pontos inaccessíveis,* A *e* B.**

O método se resume em tomar um ponto accessível *C* e resolver o triângulo *ABC*, medindo diretamente o ângulo *ACB* e calculando *AC* e *BC* pelo modo do problema precedente.

Para isso, na região accessível, adota-se e mede-se uma base *CD* assim como os ângulos dessa base com os raios visuais *AC, AD, BC e BD;* então calcula-se o lado *AC* no triângulo *ACD* e o lado *BC* no triângulo *BCD*.

Como o ângulo ACB foi também medido, pode-se resolver o triângulo ACB no qual se conhecem 2 lados e um ângulo e assim calcular AB.

172. — *Medir a altura de uma torre de base accessível sobre um terreno horizontal.*

Seja medir a altura da torre AB.

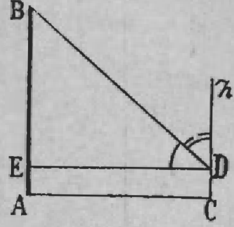

FIG. 114.

Sobre o terreno horizontal, adota-se e mede-se uma base AC, pouco diferente de AB para diminuir os erros; por meio do grafômetro, colocado em C, mede-se o ângulo de elevação EDB, formado pelo ráio visual DB e a horizontal DE.

Então conhecendo um ângulo agudo EDB e um cateto AC ou ED, pode-se resolver o triângulo retângulo BED e calcular a altura BE. A altura AB da torre será BE mais a altura EA ou DC do grafômetro.

É mais fácil medir o ângulo de DB com a vertical Cz.

Chamando h a altura do grafômetro, a altura da torre será: $h+AC \text{ tg } EDB = h+AC \text{ cotg } BDz$.

173. — *Avaliar a altura de um edifício de pé inaccesível.*

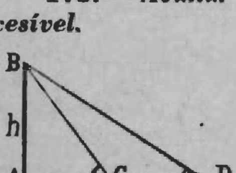

FIG. 115.

Dois casos podem apresentar-se:

1.º ***Sobre o terreno, num plano passando pela altura* EB, *pode-se escolher uma base horizontal* FG**; então mede-se essa base FG e, com o grafômetro, avaliam-se os ângulos ADB e ACB formados pela horizontal ACD e os raios visuais CB e DB; no triângulo BCD, conhecendo os ângulos e o lado

CD, pode-se calcular *BC*; depois, no triângulo retângulo *ACB*, conhecendo a hipotenusa *CB* e um ângulo agudo, pode-se calcular a altura *AB*.

A altura do edifício será *AB* mais a altura do grafômetro acima do chão.

2.° ***Sobre o terreno, não é possível escolher uma base horizontal cujo prolongamento passe pelo pé da altura.***

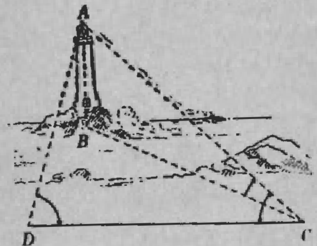

FIG. 116.

Seja medir a altura *AB*; adota-se e mede-se uma base horizontal qualquer *CD*, assim como os ângulos *ACD* e *ADC* formados por essa base e os raios visuais *CA* e *DA*; no triângulo *ACD*, conhecendo os ângulos e o lado *CD*, calcula-se o lado *AC*.

Conhecida a hipotenusa *AC*, para se poder resolver o triângulo retângulo *ABC* e calcular a altura procurada *AB*, bastará medir o ângulo *ACB*.

174. — ***De uma base horizontal* AB = d, *medem-se os ângulos* a, a', b *e* b', *formados com essa base pelos ráios visuais* AC, *AE*, *BD*, *BF*, *tangentes a uma torre circular; calcular o raio exterior dessa torre.***

FIG. 117.

Seja *AB* a base conhecida, *O* o centro da torre de raio $OC = x$, *l* a distância *AO*, $CAB = a$, $EAB = a'$, $DBA = b$ e $FBA = b'$, os ângulos formados pelas tangentes à torre traçadas pelas extremidades da base *AB*.

O triângulo retângulo COA dá logo:

$$x = l \operatorname{sen} OAC = l \operatorname{sen} \frac{a-a'}{2}; \qquad (1)$$

pois que
$$OAC = \frac{EAC}{2} = \frac{a-a'}{2}.$$

No triângulo OAB, conhecemos o lado d e os ângulos A, B e O se calculam fàcilmente:

$$A \text{ ou } OAB = OAE + a' = \frac{a-a'}{2} + a' = \frac{a+a'}{2};$$

$$B \text{ ou } OBA = OBF + b' = \frac{b-b'}{2} + b' = \frac{b+b'}{2};$$

porque
$$OBF = \frac{DBF}{2} = \frac{b-b'}{2};$$

$$O \text{ ou } AOB = 180^\circ-(A+B).$$

Nesse triângulo OAB, a relação dos senos dá:

$$\frac{l}{\operatorname{sen} B} = \frac{d}{\operatorname{sen} O} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{\operatorname{sen}\frac{b+b'}{2}} = \frac{d}{\operatorname{sen}(A+B)}$$

$$= \frac{d}{\operatorname{sen}\frac{a+a'+b+b'}{2}},$$

na equação (1), substituindo-se o valor de l, tirado desta igualdade, vem:

$$x = \frac{d \operatorname{sen}\frac{a-a'}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{b+b'}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+a'+b+b'}{2}};$$

é o valor do raio da torre, calculável por logaritmos.

175. — ***Colocado sôbre um muro, à beira de um tanque, a uma altura* h *acima da água, um observador nota um ângulo* e *para a elevação de uma nuvem acima do horizonte e um ângulo* d *para a depressão da imagem dessa nuvem refletida sôbre a água; calcular a altura* x *dessa nuvem acima do nível da água do tanque.***

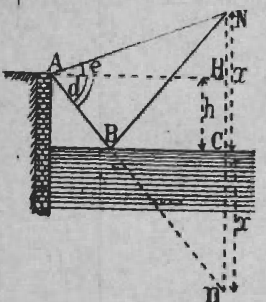

FIG. 118.

Seja A o observador, N a nuvem, n sua imagem no tanque e AH a horizontal do observador.

No triângulo NAH, NH vale $x—h$ e temos:

$$x - h = AH \operatorname{tg} e; \tag{1}$$

no triângulo retângulo nAH, nH vale $x + h$ e temos:

$$x + h = AH \operatorname{tg} d; \tag{2}$$

dividindo (1) e (2) membro a membro, vem:

$$\frac{x-h}{x+h} = \frac{\operatorname{tg} e}{\operatorname{tg} d}.$$

donde (55):

$$\frac{x}{h} = \frac{\operatorname{tg} d + \operatorname{tg} e}{\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} e} = \frac{\operatorname{sen}(d+e)}{\operatorname{sen}(d-e)};$$

portanto:

$$x = h \frac{\operatorname{sen}(d+e)}{\operatorname{sen}(d-e)}.$$

176. — ***Um navio ruma para o norte e dele se observam sôbre uma mesma linha, na direção do oeste, dois faróis situados a uma distância* d *um do***

outro. No fim de* h *horas, os raios visuais na direção dos faróis fazem os ângulos* m *e* n *com a direção norte-sul; calcular a velocidade do navio.

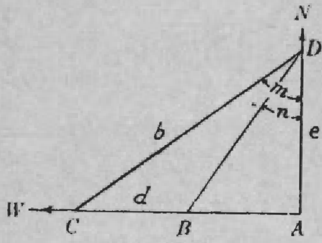

Fig. 119.

Seja A a primeira posição do navio, D a nova posição após h horas, e o espaço percorrido e b a distância CD.

No triângulo $C\,B\,D$, temos (**60**):

$$\frac{d}{\operatorname{sen} CDB} = \frac{b}{\operatorname{sen} CBD} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{\operatorname{sen}(m-n)} = \frac{b}{\operatorname{sen} DBA} = \frac{b}{\cos n}.$$

Logo:

$$b = d\,\frac{\cos n}{\operatorname{sen}\,(m-n)}.$$

Mas o triângulo retângulo ADC, dá:

$$e = b\cos m = d\,\frac{\cos m \cos n}{\operatorname{sen}\,(m-n)}.$$

A velocidade e por hora será:

$$v = \frac{e}{h} = \frac{d}{h}\,\frac{\cos m \cos n}{\operatorname{sen}(m-n)}.$$

177. — *Calcular o raio da terra, suposta esférica, conhecendo a altura* h *de um observador acima do nível do mar e a depressão* a *do horizonte.*

Seja O o centro da terra, A a vista do observador, AH a horizontal e AB o raio visual tangente ao mar.

No ponto A, situado a h metros acima do nível do mar a depressão do horizonte é o ângulo HAB formado com o plano horizontal AH pelo raio visual AB tangente à superfície do mar.

Os ângulos AOB e BAH são iguais por terem lados perpendiculares.

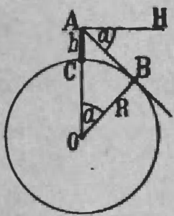

Fig. 120.

O triângulo retângulo ABO dá:

$$R = (R+h)\cos a;$$

donde (44):

$$R = \frac{h\cos a}{1-\cos a} = \frac{h\cos a}{2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}}.$$

Nos casos comuns, h é pequeno, uns 100 metros apenas, a é diminuto também e há pouca precisão na determinação de R.

178. — ***Um avião segue o rumo OA dado pelo ângulo α° em relação ao norte geográfico, com uma velocidade própria $\overrightarrow{OA}$. O vento sopra do ponto β° com uma velocidade $\overrightarrow{OB}$. Calcular a rota seguida, a velocidade resultante $\overrightarrow{OR}$ e a deriva.***

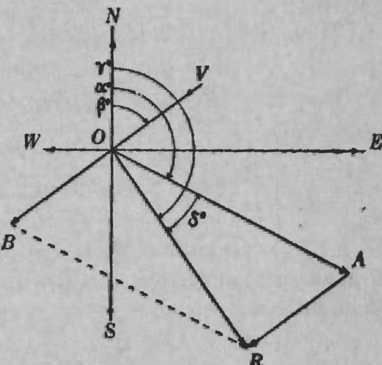

Fig. 121.

Lembremos logo que os ângulos de orientação são contados a partir do Norte no sentido de rotação dos ponteiros do relógio, segundo a convenção indicada no número 25.

Pelo ponto O, tracemos o vector $\overrightarrow{OA}$ e seja $NOA = a$ o rumo dado.

Seja, também, $NOV = \beta$ a direção do ponto do horizonte donde sopra o vento. O vector $\overrightarrow{OB}$ traçado pela origem representa a velocidade do vento.

Façamos a composição desses dois vectores, traçando, para isso, $\overrightarrow{AR}$ equipolente de $\overrightarrow{OB}$. A resultante é o vector $\overrightarrow{OR}$ que representa a direção, o sentido e a intensidade do movimento do avião. A direção OR indica, pois, a ***rota*** do avião. O eixo do aparelho fica, no entanto, sempre apontado paralelamente a OA, no mesmo ***rumo***. O ângulo AOB é a ***deriva*** ou desvio do avião provocado pela velocidade do vento.

Devemos, pois, resolver o triângulo AOB.

Dele conhecemos dois lados, $OA = v$ e $AR = v'$, assim como o ângulo $RAO = (\alpha - \beta)$.

Com efeito, as paralelas AR e VB e a secante AO, dão:

$$\text{ângulo } RAO = \text{ângulo } VOA = \alpha - \beta.$$

O problema se reduz, portanto, ao 2.º Caso da resolução dos triângulos obliquângulos. A fórmula (**63**) nos dará logo a diferença dos dois ângulos desconhecidos. Aplicaremos depois a relação dos senos para o cálculo do lado OR.

Na prática prefere-se calcular logo o lado OR, velocidade resultante, por meio das fórmulas (**61**). Temos aqui:

$$OB = v^2 + v'^2 - 2vv' \cos(\alpha - \beta).$$

Calcula-se pelos logaritmos apenas o último termo dessa expressão.

É fácil depois, pela relação dos senos, calcular o ângulo da deriva.

179. — ***Um avião situado em* O *deve ir a um ponto* A *cuja direção é dada pelo ângulo* α. *O vento sopra da direção* β° *com uma velocidade de*** v′ km/h.

Que rumo, deverá tomar o avião sabendo que tem uma velocidade própria de v km/h? ***Qual será a velocidade resultante?***

(a) CONSTRUÇÃO GRÁFICA. — Seja O a posição inicial; v e v' os módulos das velocidades próprias do avião e do vento; A o ponto de chegada.

Pelo ponto O traçamos o vector $\vec{v'}$ de acordo com o ângulo α da proveniência do vento. Se o avião apenas acompanhasse o movimento do vento, depois de 1 h estaria em B. Centro em B, descrevamos um arco de círculo de raio v e notemos o ponto M de intersecção com a direção OA. Se não houvesse vento o avião percorreria a distância BM em uma hora.

Pelo efeito simultâneo dos dois movimentos, vento e propulsão, percorreu, pois, numa hora o trajeto OM, que representa a velocidade resultante.

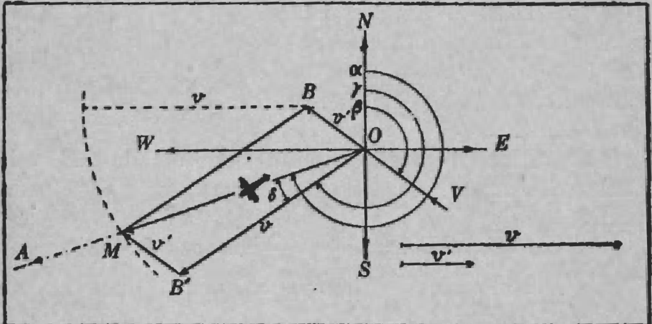

FIG. 122.

Completemos agora o paralelogramo $OBMB'$, traçando OB' paralela a BM; e, pelo ponto M, MB' paralela a BO.

Baseados no princípio da independência dos movimentos, dizemos que o avião percorreu o caminho OB' por efeito da velocidade própria e ao mesmo tempo o vento o levou até M, na rota OA. O vector $\overrightarrow{OM}$ representa a soma geométrica dos vectores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{BM}$.

(*b*) CÁLCULO. — No triângulo $B'MO$ devemos calcular $\overrightarrow{OM}$, velocidade resultante, e o ângulo de desvio MOB'. Para isto conhecemos dois lados $OB'=v$ e $B'M=v'$ e o ângulo OMB'. Com efeito, temos:

$$\text{ângulo } MOV = \alpha-\beta$$

$$\text{e} \quad OMB' = BOM = 180-(\alpha-\beta) = 180-\alpha+\beta.$$

Podemos, pois, como no problema anterior, aplicar as fórmulas de resolução do 2.º caso dos triângulos obliquângulos, ou, calcular OM pela fórmula (**61**).

NOTA. — Nestes dois problemas consideramos apenas pequenas distâncias de modo a não tomarmos em conta a redondeza da Terra. Para grandes distâncias deveríamos empregar as fórmulas da ***trigonometria esférica*** (n.º 205).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

157. — Calcular a altura de um edifício sabendo que, das extremidades de uma base de 48m medida num plano horizontal e na direção da base do edifício, foram observados ângulos de elevação de 44° 7' e 57° 37' respectivamente.

Resposta: 120,874 m.

158. — Uma torre cilíndrica tem 50 m de circunferência exterior. Qual é o ângulo formado pelos raios visuais horizontais tangentes a essa torre, no caso de um observador situado a 150 m do centro da torre?

159. — Um pedestal de altura a sustenta uma estátua de altura b. A que distância x do monumento se deve colocar um observador para ver o pedestal e a coluna debaixo de ângulos iguais? Supor a vista do observador no nível da base do pedestal. Dizer a condição de possibilidade do problema.

160. — Dois observadores situados a 1 875 m de distância, medem o ângulo de elevação de um avião no momento em que este passa pelo plano vertical comum aos dois observadores. Calcular a altura do avião. Ângulos medidos: 75° e 82°. Dar duas soluções possíveis.

161. — Um avião segue o rumo 075° com uma velocidade própria de 300 km/h. O vento sopra de um ponto do horizonte a 110° com a velocidade de 60 km/h. Calcular a posição da rota seguida e a velocidade resultante.

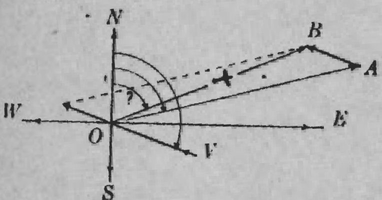

Fig. 123.

Sugestão. — Na fig. 123 calcular o ângulo NOB e o lado OB do triângulo OBA. Ver números 25, 178 e 179.

162. — Um avião tem velocidade própria de 400 km/h e deve seguir a rota 065°. Que rumo deve tomar se o vento sopra do N 20° W com a velocidade de 50 km/h? Qual é a velocidade resultante?

163. — Um navio cargueiro ruma para N 35° E com a velocidade de 12 nós. Encontra uma corrente que se dirige para S 22° E com a velocidade de 3 nós. Calcular a nova velocidade do cargueiro e o desvio sofrido pela ação da corrente.

164. — Um avião de reconhecimento que tem uma velocidade própria de 200 km/h deve alcançar um navio situado a 150 km na direção N 25° E. O navio segue a rota Oeste ⟶ Leste com a velocidade de 20 km por hora. Não havendo vento, que rumo deverá tomar o avião para alcançar o navio? Quanto tempo levará?

Sugestão. — Seja h o tempo em horas. Fazer $OC = 200\ h$; $DC = 20\ h$; ângulo $ODC = 115°$. Calcular o ângulo COD pela fórmula (60).

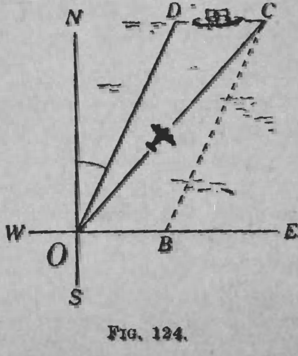

Fig. 124.

165. — Um avião tem uma velocidade própria de 360 km/h e o rumo 075°. Devido à velocidade do vento, segue a rota 055° a 300 km/h. Calcular a direção e a velocidade do vento.

166. — Um observador militar vê duas baterias inimigas debaixo do ângulo de 35°. O intervalo entre a luz do disparo e o momento em que se ouve o tiro é de 5,2 seg para uma bateria e 4 seg para a outra. Sabendo que o som percorre 340 m por seg., calcular a distância que separa as duas baterias.

167. — De um barco-patrulha *P* vê-se ao mesmo tempo um navio inimigo *Q* e um cruzador aliado *C* nas direções respectivas S 70° W e S 12° E. Mede-se com o telêmetro as suas distâncias que são avaliadas em 10 milhas para o inimigo e 8 milhas para o cruzador. O operador de rádio do barco-patrulha comunica ao comandante do cruzador a posição do navio inimigo: distância *CQ* e ângulo *PCQ*. Calcular esses elementos.

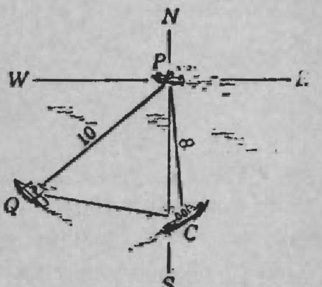

Fig. 125.

168. — Um navio deixa o porto do Rio e navega 50 milhas na direção S 20° W. Muda então de rumo e navega 35 milhas na direção S 20° W. Qual é a sua distância atual ao porto de saída e em que direção deve navegar para voltar ao Rio em linha reta?

169. — Do alto de um farol a 50 m de altura acima do nível do mar os ângulos de depressão de dois navios, *R* e *S*, são de 3° 20′ para *R* e 5° 10′ para *S*. Da base do farol os dois navios são vistos sob um ângulo horizontal de 42° 20′. Calcular a distância dos navios ao farol.

Fig. 126.

170. — Um navio *A* dirige-se para um porto *P*, situado a 350 milhas. Um hidro-avião parte nesse mesmo instante de um aeroporto *B*, situado a 120 milhas ao sul do porto P. O navio e o avião têm velocidades respectivas de 25 e 180 milhas por hora. A orientação do navio, dada pelo porto é 280°. Pede-se calcular:

a) o rumo que deve tomar o hidro-avião para alcançar o navio;
b) a distância ao porto *P*, no momento do encontro.

SUGESTÃO. — 1.º No triângulo *APB*, calcular o lado *AB* e o ângulo *A*.

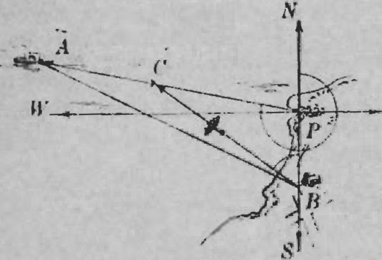

FIG. 127.

2.º No triângulo *ABC*, tomar *AC* e *BC*, respectivamente proporcionais às velocidades 25 e 180; calcular os ângulos *ABC* e *ACB*.

3.º No triângulo *BCP*, calcular o ângulo *CBP* e o lado *CP*.

171. — Um navio inimigo *I*, ruma para um porto neutro *P* situado a uma distância de 95 milhas. Um destroier aliado *D*, situado a 135 milhas do porto recebe aviso para interceptar o navio. As orientações dadas pelo porto são as seguintes: Navio S 75º W. Destróier S 35º E. Velocidade do navio 20 milhas por hora; velocidade do destroier 30 milhas por hora.

Poderá o destróier alcançar o navio inimigo antes da sua chegada ao porto? A que distância do porto se daria, então, o encontro?

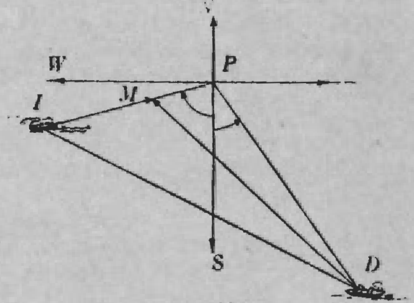

FIG. 128.

SUGESTÃO. — No triângulo *PDI* calcular *ID* e o ângulo em *I*. No triângulo *IMD*, calcular o ângulo *IDM* e, depois, a distância *IM*.

172. — Um avião situado no campo *O*, deve alcançar um navio situado a 150 milhas de *O* e na direção 042º relativamente a *O*. O navio segue a rota Oeste ⟶ Leste com a velocidade de 28 milhas por hora. O vento sopra da direção 300º com a velocidade de 15 milhas por hora.

(*a*) Que rumo deve tomar o avião, cuja velocidade própria é de 120 milhas por hora?

(*b*) Quanto tempo levará para alcançar o navio?

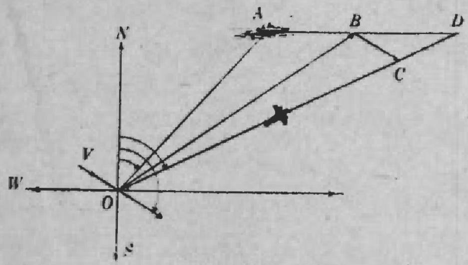

FIG. 129.

SUGESTÕES. — Não houvesse vento, o encontro se daria em B. Por causa do vento o encontro se dará em D.

A rota é indicada por OD e o rumo a seguir por OB.

No triângulo AOB, calcular o ângulo AOB e o lado OB. Notar para isso que AB e OB são proporcionais às velocidades 28 e 120.

No triângulo BOC calcular o ângulo BOC.

Enfim, no triângulo AOB, calcular AD e deduzir o tempo.

UNIDADE XVII

ELEMENTOS SECUNDÁRIOS DE UM TRIÂNGULO

180. — Elementos secundários. — Além dos 6 elementos principais, 3 lados e 3 ângulos, consideraremos nesta unidade:

(a) o raio do círculo circunscrito;

(b) os raios dos círculos inscrito e ex-inscritos;

(c) as alturas;

(d) as medianas;

(e) as bissetrizes interiores e exteriores.

Faremos numerosas referências à geometria, pois o conhecimento das definições desses elementos e de suas propriedades geométricas, auxilia grandemente o seu estudo trigonométrico.

181. — Raio R do círculo circunscrito. — Já vimos (n.º 169, III), que:

$$\boxed{2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}} \qquad (71)$$

A geometria (*c. sup.*, n.º 393, 3.º) dá:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

A relação (71) dá:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a+b+c}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C};$$

porque cada uma das razões iguais é igual à soma dos numeradores dividida pela soma dos denominadores.

Aplicando a fórmula deduzida em (**145,** 4.º), temos:

$$2R = \frac{2p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$$

ou

$$\boxed{R = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}} \qquad (72)$$

182. — Raios r_a, r_b, r_c, dos círculos inscrito e ex-inscritos. — No triângulo ABC, sejam D, E e F, os pontos de contacto do círculo inscrito. O triângulo retângulo ODA da: $r = AD \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$.

Mas $AD = (AD + BE + EC) - BC = p - a$;

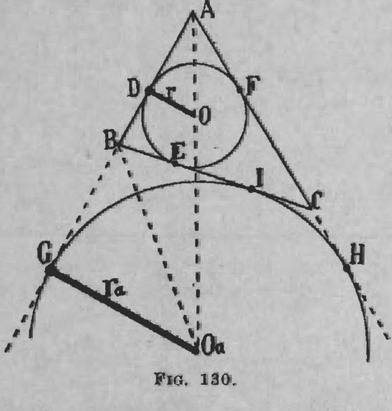

Fig. 130.

logo

$$\boxed{r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A} \qquad (73)$$

Com os outros ângulos teríamos de modo análogo:

$$r = (p-b)\ \mathrm{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\ \mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

2.° O triângulo O_aGA dá: $r_a = AG\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}A$; mas $AG = p$ (*Geom., c. sup.*, n.° 376); logo:

$$r_a = p\ \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}A.$$

O triângulo retângulo O_aGB dá:

$$r_a = BG\ \mathrm{tg}\ GBO_a = BG\ \mathrm{cotg}\ \frac{B}{2}$$

porque $GBC + B = 180°$; logo $\frac{GBC}{2}$ ou $GBO_a + \frac{B}{2} = 90°$;

mas $BG = p-c$ (*Geom., c. sup.*, n.° 376); logo:

$$r_a = (p-c)\ \mathrm{cotg}\ \tfrac{1}{2}B.$$

Do mesmo modo, o triângulo retângulo O_aHC daria:

$$r_a = (p-b)\ \mathrm{cotg}\ \tfrac{1}{2}C.$$

Um cálculo análogo nos conduziria aos outros raios dos círculos ex-inscritos. Temos, pois:

$$\boxed{\begin{aligned} r_b &= p\ \mathrm{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\ \mathrm{cotg}\frac{A}{2} = (p-a)\ \mathrm{cotg}\frac{C}{2} \\ r_c &= p\ \mathrm{tg}\frac{C}{2} = (p-a)\ \mathrm{cotg}\frac{B}{2} = (p-b)\ \mathrm{cotg}\frac{A}{2} \\ r_a &= p\ \mathrm{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\ \mathrm{cotg}\frac{C}{2} = (p-c)\ \mathrm{cotg}\frac{B}{2} \end{aligned}} \qquad (74)$$

183. — Alturas h_a, h_c, h_b. — 1.º A geometria dá para qualquer triângulo:

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c = 2\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Logo, é fácil deduzir cada altura em função dos 3 lados.

2.º Os triângulos retângulos formados pelas alturas dão:

$$\boxed{\begin{aligned} h_a &= b \text{ sen } C = c \text{ sen } B, \\ h_b &= c \text{ sen } A = a \text{ sen } C, \\ h_c &= a \text{ sen } B = b \text{ sen } A. \end{aligned}} \qquad (75)$$

3.º A dupla área do triângulo é ah_a ou, ainda, bc, sen A; donde, a equação $ah_a = bc \text{ sen } A$; a relação dos senos permite substituir b e c em função de a e vem:

$$ah_a = \frac{a \text{ sen } A}{\text{sen } A} \cdot \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} \cdot \text{sen } A,$$

donde:

$$h_a = \frac{a \text{ sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A};$$

Para as outras alturas obteríamos resultados análogos.

$$\boxed{\begin{aligned} h_a &= \frac{a \text{ sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A}; \\ h_b &= \frac{b \text{ sen } A \text{ sen } C}{\text{sen } B}; \\ h_c &= \frac{c \text{ sen } B \text{ sen } A}{\text{sen } C}. \end{aligned}} \qquad (76)$$

184. — Medianas m_a, m_b, m_c. — 1.° O triângulo ADC, de lados m_a, b e $\frac{a}{2}$, dá:

$$m^2_a = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cos C; \qquad (1)$$

também o triângulo ADB dá:

$$m^2_a = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cos B; \qquad (2)$$

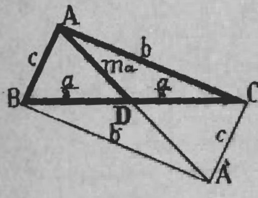

Fig. 131.

2.° No triângulo primitivo, $B+C = 180—A$; prolongando a mediana AD de um comprimento DA' igual a AD e unindo A' a B e a C, a figura $ABA'C$ é um paralelogramo e o ângulo C é igual a CBA'; donde:

$$B + CBA' = 180—A$$

ou $ABA' = 180—A$ e o triângulo ABA' dá:

$$4m^2_a = b^2 + c^2 + 2bc \cos A. \qquad (3)$$

3.° A geometria dá igualmente (*c. sup.*, n.° 286, 1.°):

$$b^2 + c^2 = 2m^2_a + \frac{a^2}{2}. \qquad (4)$$

Essas 4 fórmulas dão m_a, mas não são calculáveis por logaritmos.

185. — Bissectrizes interiores α, β, γ. — A bissectriz interior α forma dois triângulos parcelares ABA' e ACA', cuja soma dá o triângulo ABC. Logo, temos:

$$2S = \alpha b \text{ sen } \tfrac{1}{2} A + \alpha c \text{ sen } \tfrac{1}{2} A \text{ bc sen } A;$$

ou $$\alpha(b+c) \text{ sen } \tfrac{1}{2} A = 2\, bc \text{ sen } \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A;$$

donde

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \tfrac{1}{2} A;$$

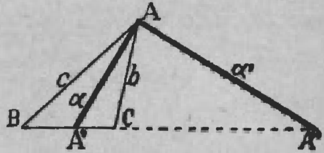

Fig. 132.

substituindo $\cos \frac{1}{2} A$ por seu valor (**66**), vem ainda:

$$\alpha = \frac{2}{b+c} \sqrt{p\,(p-a)bc}.$$

De modo análogo obteríamos as outras bissectrizes:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}; \\ \beta &= \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2} = \frac{2}{a+c}\sqrt{p(p-b)ac}; \\ \gamma &= \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2} = \frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-c)ab}; \end{aligned}} \qquad (77)$$

186. — Bissectrizes exteriores α', β', γ'. — A bissectriz exterior α' forma dois triângulos parcelares ABA'' e ACA'' cuja diferença dá o triângulo ABC. Logo, temos:

$$2S = a\alpha' \text{ sen } (90^\circ + \frac{A}{2}) - b\alpha' \text{ sen } (90^\circ - \frac{A}{2}) = bc \text{ sen } A;$$

donde:

$$\alpha' \,(c \cos \tfrac{1}{2} A - b \cos \tfrac{1}{2} A) = 2bc \text{ sen } \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A;$$

e $$\boxed{\alpha' = \frac{2bc}{c-b} \text{ sen } \tfrac{1}{2} A} \qquad (78)$$

substituindo sen $\frac{1}{2} A$ por seu valor (67), vem ainda:

$$\alpha' = \frac{2}{c-b}\sqrt{(p-b)\ (p-c)\ bc}.$$

De modo análogo obteríamos β' e γ'.

187. — Quadrilátero inscrito. — Problema. — ***Conhecendo-se os quatro lados* a, b, c, d, *de um quadrilátero inscritível, calcular: os ângulos,* A, B, C, D; *a área; as diagonais,* α, β; *o raio,* R, *do círculo circunscrito.***

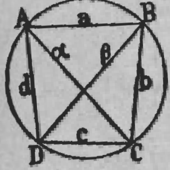

FIG. 133.

1.° Seja o quadrilátero inscrito $ABCD$; temos, com os triângulos ADB e BCD:

$$\beta^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A \qquad (1)$$

e $$\beta^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C. \qquad (2)$$

Como A e C são suplementares, $\cos A = -\cos C$ e as equações acima dão:

$$a^2+d^2-2ad \cos A = b^2+c^2+2bc \cos A;$$

donde:

$$2 \cos A\ (ad+bc) = a^2+d^2-b^2-c^2,$$

$$\cos A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2\ (ad+bc)}. \qquad (3)$$

Por meio desta equação temos o ângulo A; eis a sua transformação logarítmica; temos:

$$1-\cos A = \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2\,(ad+bc)} =$$

$$= \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(b+c+a-d)\,(b+c+d-a)}{2(ad+bc)};$$

escrevendo: $\quad a+b+c+d = 2p$

temos: $\quad -a+b+c+d = 2(p-a)$

$\quad a-b+c+d = 2(p-b)$, etc.

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2(p-p)\ 2(p-a)}{2(ad+bc)};$$

donde:

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-d)}{ad+bc}}. \qquad \textbf{(79)}$$

Do mesmo modo, temos:

$$1+\cos A = \frac{2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} =$$

$$= \frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)};$$

donde:

$$2 \cos \tfrac{1}{2} A = \frac{(a+d+b-c)\ \ (c+d-b+c)}{2(ad+bc)} =$$

$$= \frac{4\ (p-b)\,(p-c)}{2(ad+bc)};$$

e

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{ad+bc}}. \qquad \textbf{(80)}$$

Dividindo membro a membro (**79**) e (**80**), temos:

$$\boxed{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-d)}{(p-b)\,(p-c)}}} \qquad \textbf{(81)}$$

Obteríamos fórmulas análogas para os outros 3 ângulos.

2.° A área:

$$S = ABD + BCD = \frac{1}{2}ad \operatorname{sen} A + \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} C;$$

ora, A e C são suplementares e têm senos iguais; logo:

$$S = \operatorname{sen}½A\ (ad+bc) = \operatorname{sen}½A \cos½A\ (ad+bc); \quad \textbf{(36)}$$

substituindo $\operatorname{sen}½A$ e $\cos½A$ por seus valores (**79** e **80**) temos:

$$S = \sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}. \quad \textbf{(82)}$$

É a fórmula de Brahmegupta, geómetra indú do século VI.

3.° Para se obter a diagonal β, basta eliminar $\cos A$ entre as equações (1) e (2); na equação (1) levando o valor de $\cos A$ (3), temos, simplificando:

$$\beta^2 = a^2+d^2-2ad \times \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} =$$

$$= \frac{ab\ (ac+bd)+cd\ (bd+ac)}{ad+bc}$$

ou

$$\beta^2 = \frac{(ab+cd)\ (ac+bd)}{ad+bc}. \quad \textbf{(83)}$$

Obteríamos para a diagonal α:

$$\alpha^2 = \frac{(bc+ad)\ (bd+ac)}{ab+cd}. \quad \textbf{(84)}$$

Destes dois valores, tira-se:

$$\alpha\beta = ac + bd$$

e

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

São os resultados já encontrados em geometria (**c. sup.**, n.s 381, 305 e 307, Teoremas de Ptolomeu).

4.° O raio do círculo circunscrito ao quadrilátero $ABCD$ ou ao triângulo ABD é dado pela razão dos senos:

$$2R = \frac{\beta}{\operatorname{sen} A} = \frac{\beta}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A};$$

substituindo (**83, 79** e **80**), vem:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}. \qquad \textbf{(85)}$$

Nota. — No quadrilátero ao mesmo tempo inscrito e circunscrito, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos dois outros, ou:

$$p=a+c=b+d;\; p-a=c;\; p-b=d;\; p-c=a;\; p-c=b$$

e a fórmula da área vem a ser:

$$S = \sqrt{abcd}.$$

188. — Área de um paralelogramo. — ***A área de um paralelogramo é igual ao produto de dois lados consecutivos pelo seno do ângulo compreendido.***

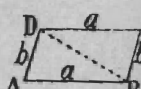

Fig. 134.

O paralelogramo $ABCD$ consta dos dois triângulos iguais ABD e BCD, de lados a e b. A área desse paralelograma é:

$$S = 2\text{ABD} = ab \operatorname{sen} A.$$

189. — Área de um quadrilátero. — ***A área de um quadrilátero é igual à metade do produto das diagonais pelo seno do ângulo que formam.***

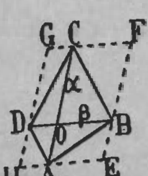

Fig. 135.

O quadrilátero qualquer $ABCD$, de diagonais α e β, consta de 4 triângulos AOB, BOC, COD e DOA.

Pelos vértices, traçando paralelas às diagonais, forma-se o paralelogramo $EFGH$, cuja área é dupla da do quadrilátero e no qual os lados são as diagonais α e β e o ângulo H é igual ao ângulo agudo O; logo, temos:

$$EFGH = \alpha\beta \operatorname{sen} H = \alpha\beta \operatorname{sen} O$$

e

$$ABCD = \tfrac{1}{2}\alpha\,\beta \operatorname{sen} O.$$

190. — Polígono regular. — ***Para um polígono regular de* n *lados, calcular:* 1.° *o lado* l *em função do raio* R *do círculo circunscrito;* — 2.° *o lado* l *em função do raio* r *do círculo inscrito;* — 3.° *a área em função do raio* R, *de* r *ou do apótema* a *do lado* l.**

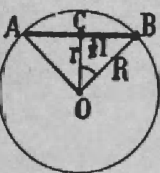

FIG. 136.

1.° Seja $AB = l$ o lado do polígono regular de n lados, inscrito no círculo de raio R; traçando o apótema $OC = r$ ou raio do círculo inscrito, o ângulo COB é:

$$\frac{2\pi}{2n} \text{ ou } \frac{\pi}{n} \quad \text{e o triângulo retângulo } OCB \text{ dá:}$$

$$\frac{l}{2} = R \operatorname{sen} COB; \text{ donde } l = 2R \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}. \qquad (1)$$

2.° O mesmo triângulo OCB dá:

$$l = 2r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}. \qquad (2)$$

3.° A área S do polígono regular consta de n triângulos iguais a AOB; ora, o triângulo AOB tem como área:

$$AOB = \tfrac{1}{2}\, OA \,.\, OB \,.\operatorname{sen} AOB = \tfrac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n};$$

logo:

$$S = \frac{n}{2} R^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}. \qquad (3)$$

4.° A área do mesmo triângulo AOB é ainda:

$$AOB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} lr = r^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

por causa de (2).

Logo: $$S = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}. \qquad (4)$$

5.° A fórmula (2) dá:

$$r = \frac{1}{2} l \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n};$$

substituindo em (4) vem:

$$S = \frac{1}{4} nl^2 \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}. \qquad (5)$$

As aplicações são fáceis e interessantes para os polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 lados, empregando as fórmulas (3) que logo dão as linhas trigonométricas do ângulo $\frac{\pi}{n}$.

191. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Resolver um triângulo conhecendo os lados* b *e* c *e a bissectriz* α *do ângulo compreendido.***

A fórmula (77) dá:

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \tfrac{1}{2} A.$$

donde $$\cos \tfrac{1}{2} A = \frac{\alpha(b+c)}{2bc}.$$

Essa equação dá o ângulo A e o problema se reduz ao caso conhecido: ***dados* b, c *e* A, *resolver um triângulo*** (2.° caso).

II. — ***Dados um ângulo* A, *um lado adjacente* b *e a diferença* c — a = d *dos outros lados de um triângulo, resolver esse triângulo.***

Calculemos os ângulos B e C. Temos:

$$B = 180° - (A + C),$$

A relação dos senos dá:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen}(A+C)} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{c-a}{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A};$$

donde:

$$\frac{b}{d} = \frac{\operatorname{sen}(A+C)}{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+C) \cos\frac{1}{2}(A+C)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(C-A) \cos\frac{1}{2}(C+A)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C+A)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-A)};$$

logo (n.º 147):

$$\frac{b+d}{b-d} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(C+A) + \operatorname{sen} \frac{1}{2}(C-A)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(C+A) - \operatorname{sen} \frac{1}{2}(C-A)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}A}$$

enfim, vem: $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{b+d}{b-d} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A.$$

Essa fórmula dá C e o problema se reduz ao 1.º caso de resolução dos triângulos.

III. — ***De um ponto interior de um triângulo, traçam-se paralelas aos 3 lados e formam-se 3 triângulos e 3 paralelogramos; calcular a razão do produto dos 3 primeiros para o produto dos 3 últimos.***

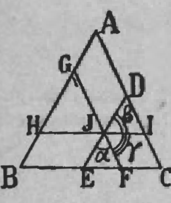

FIG. 137.

Sejam o triângulo ABC, o ponto interior J e $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$ os ângulos dos triângulos ao redor do ponto J; os ângulos dos paralelogramos lhes são respectivamente iguais como opostos pelo vértice.

As áreas dos triângulos são:

$$\frac{1}{2} JE.JF \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{1}{2} JI.JD \operatorname{sen} \beta, \qquad \frac{1}{2} JG.JH \operatorname{sen} \gamma$$

e seu produto é:

$$\frac{1}{8} JE.JF.JI.JD.JG.JH \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma; \qquad (1)$$

as áreas dos paralelogramos são:

$$JD.JG \operatorname{sen} \alpha, \qquad JH.JE \operatorname{sen} \beta, \qquad JF.JI \operatorname{sen} \gamma,$$

e seu produto é:

$$JD.JG.JH.JE.JF.JI \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma. \qquad (2)$$

A razão de (1) para (2) é $\frac{1}{8}$.

Logo, o produto das áreas é 8 vezes menor nos triângulos do que nos paralelogramos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

173. — Calcular a área de um pentágono regular de 5 m de lado.

174. — Conhecendo-se o raio R de um círculo circunscrito a um polígono regular de n lados, determinar o ângulo central O e o lado c do polígono regular.

Aplicação numérica para: $R = 2\text{m}$; $n = 7$ lados.

175. — As tangentes comuns interiores a dois círculos de raios $R = 5$ e $r = 2$ cortam-se perpendicularmente. Calcular a área do triângulo formado por essas linhas e a tangente comum externa.

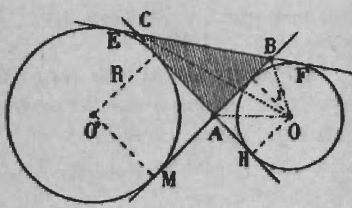

FIG. 138.

176. — Calcular o raio do círculo circunscrito a um triângulo de lados $a = 10$, $b = 8$ e $c = 5$.

177. — Calcular a área do segmento circular compreendido entre um arco de 27° e sua corda num círculo de 8m de raio.

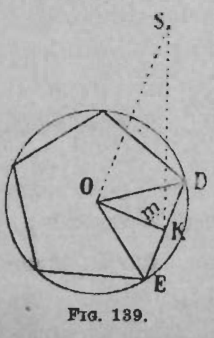

FIG. 139.

178. — Dados: o lado $a = 2\text{m}$ da base de uma pirâmide pentagonal e o ângulo diedro $m = 65°$ formado pela base e os triângulos da superfície lateral; calcular o volume da pirâmide.

SUGESTÃO. — O triângulo OSK representa o rebatimento no plano da base do triângulo formado pela altura, o apótema de base e o apótema da pirâmide. O ângulo OKS tem mesma medida do que o diedro m.

UNIDADE XVIII

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

192. — Resolução das equações. — Na Unidade IX, § 114, já vimos alguns exemplos de equações simples que resolvemos de modo elementar. Aprendemos também a interpretar geomètricamente os resultados obtidos, utilizando-nos dos gráficos da Unidade VII. Com essa base, poderemos agora prosseguir com a resolução mais completa das equações ***com uma incógnita*** e de alguns sistemas de equações ***simultâneas.***

Método geral de resolução. — O método mais empregado consiste em ***exprimr por meio de uma só as várias funções circulares da equação dada,*** donde resulta uma equação algébrica que se trata pelos processos da álgebra.

Para isso: 1.° adota-se como incógnita auxiliar uma função circular do arco desconhecido, de um múltiplo, de um sub-múltiplo dêsse arco ou de qualquer arco cujo conhecimento permita calcular o arco procurado;

2.° substituem-se as outras funções circulares da equação de modo a deixar apenas a incógnita auxiliar adotada;

3.° resolve-se a equação em relação à incógnita auxiliar e verificar-se quais são as que convêm ao sistema;

4.° as raízes aceitáveis darão alguma equação trigonométrica simples, como:

$$\operatorname{sen} x = a, \quad \cos x = b, \quad \operatorname{tg} x = c, \quad \operatorname{sen} 2x = d, \quad \text{etc.}$$

As táboas darão o menor valor de x que verifica essas equações; e os outros arcos serão dados pelas fórmulas (**8, 9, 10, 11**).

Certas substituições dão um radical; por exemplo a substituição por $\sqrt{1-\cos^2 x}$; então, o cálculo obriga a isolar o radical num membro e a elevar os dois membros ao quadrado, como se procede na resolução das equações irracionais. Isto pode introduzir uma solução estranha que não verifica a equação proposta; logo, ***são preferíveis quando possível, as substituições racionais.***

Alguns exemplos mostrarão como se aplicam esses processos gerais de resolução.

193. — Exercício I. — ***Calcular os ângulos que satisfazem à equação***

$$\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x.$$

Adotemos $\operatorname{tg} x$ para incógnita auxiliar. Temos (30):

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x};$$

logo:

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{tg} x.$$

1.° Eliminemos o factor comum $\operatorname{tg} x$, o que dá $\operatorname{tg} x = 0$ ou $x = \mathbf{0}$; é a primeira raiz da equação.

2.° temos, depois:

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 3;$$

donde:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}; \quad \text{e} \quad x = \pm \mathbf{30^\circ} = \pm \frac{\pi}{6}.$$

As respostas completas são (**10**):

$$x = k\pi \quad \text{e} \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

194. — Exercício II. — Resolver a equação:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos x.$$

Podemos escrevê-la:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos x.$$

Então os arcos $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ e x têm cosenos iguais; logo, temos (**11**):

$$x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right);$$

donde:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4k+1}{3}\pi$$

e $$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad x = (4k-1)\pi.$$

195. — Exercício III. — ***Resolver a equação***

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}.$$

Essa equação pode escrever-se:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = \sqrt{2},$$

ou (**51**):

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},$$

ou, pois que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}:$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Logo:

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \quad \text{e} \quad x = (8k+1)\frac{\pi}{4}.$$

196. — Exercício IV. — ***Resolver a equação:***

$$\text{tg}\, x + 4 \cot\text{g}\, x = 5.$$

Como incógnita auxiliar, tomemos $\text{tg}\, x$; a equação pode escrever-se:

$$\text{tg}\, x + \frac{4}{\text{tg}\, x} = 5$$

ou

$$\text{tg}^2 x - 5\, \text{tg}\, x + 4 = 0$$

que dá:

$$\text{tg}\, x = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4. \\ 1. \end{cases}$$

Para

$$\text{tg}\, x = 4, \quad x' = 75^\circ\, 57'\, 49'', 5,$$

e

$$\text{tg}\, x = 1, \quad x'' = 45^\circ.$$

Os valores gerais de x são: $k\pi + x'$ e $k\pi + x''$.

197. — Exercício V. — ***Resolver a equação:***

$$\text{sen}\, 7x = \text{sen}\, 9x.$$

Passando tudo para o 1.º membro, vem:

$$\text{sen}\, 7x - \text{sen}\, 9x = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sen}\, 9x - \text{sen}\, 7x = 0,$$

ou (50):

$$2\, \text{sen}\, x \cos 8x = 0.$$

Essa equação decompõe-se em:

$$\operatorname{sen} x = 0; \quad \text{donde} \quad x = k\pi;$$

e $$\cos 8x = 0; \quad \text{donde} \quad 8x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{16}.$$

198. — Exercício VI. — ***Resolver a equação:***

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0.$$

Transformando sen $3x$ + sen x em produto (**49**), a equação vem a ser:

$$2 \operatorname{sen} 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x = 0$$

ou $$\operatorname{sen} 2x\,(2\cos x - 1) = 0.$$

Decompõe-se em duas equações parcelares que se resolvem separadamente; temos:

1.º $\operatorname{sen} 2x = 0$; donde: $2x = k\pi$ e $x = \dfrac{k\pi}{2}$;

2.º $2\cos x - 1 = 0$;

donde: $$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3};$$

logo $$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

199. — Exercício VII. — ***Resolver e discutir a equação:***

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c.$$

Há numerosos modos de resolver essa equação; o melhor, resulta de uma transformação logarítmica. É o seguinte: dividindo tudo pelo factor a e fazendo

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad (1)$$

temos:
$$\operatorname{sen} x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a},$$
$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a},$$
$$\operatorname{sen} x\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi;$$
$$\operatorname{sen}(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi. \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) permitem resolver a equação proposta; para isso:

1.° Por meio de (1) calcula-se o ângulo φ;

2.° Por meio de (2) um ângulo α tal que
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}\cos\varphi;$$
então o ângulo x é dado pela fórmula (9):
$$x+\varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x+\varphi = (2k+1)\pi - \alpha,$$
ou
$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha - \varphi.$$

Discussão. — Como a tangente pode variar desde $-\infty$ até $+\infty$, o ângulo φ existe sempre; a única dificuldade depende de α ou $(x+\varphi)$, porque devemos ter
$$-1 \leq \operatorname{sen}(x+\varphi) \leq +1;$$
ou
$$-1 < \frac{c}{a}\cos\varphi \leq +1;$$
ou
$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leq 1. \qquad (3)$$

Mas $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{1}{1+\dfrac{b^2}{a^2}} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}.$

Substituindo este valor em (3), a condição de possibilidade vem a ser:

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} \leqq 1, \qquad \text{ou} \qquad c^2 \leqq a^2+b^2.$$

Pode-se notar que não depende dos sinais de a, b ou c, mas apenas do seu valor absoluto.

Construção das raízes. — Tracemos um triângulo retângulo DOE de catetos $OD = a$ e $DE = b$; a hipotenusa OE será $\sqrt{a^2+b^2}$; o ângulo DOE valerá φ porque $\operatorname{tg} DOE = \dfrac{b}{a}$.

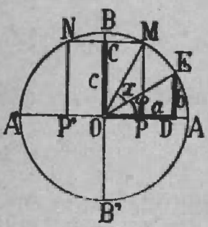

FIG. 140.

Tracemos o círculo de centro O e de raio OE, assim como os diâmetros retangulares $A'ODA$ e BB'; sobre OB levemos $OC = c$ e tracemos a paralela MCN a AA'; os ângulos MOE e NOE serão os valores de x.

Com efeito:

$$\text{sen } AOM = \text{sen } AON = \frac{MP}{OA} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{sen } (x+\varphi);$$

logo $\quad x' + \varphi = AOM \quad$ e $\quad x''+\varphi = AON$;

como $\varphi = AOE$, segue-se que: $x' = AOM - AOE = EOM$

e $x'' = AON - AOE = EON$.

A construção será possível quando tivermos:

$$OB' \leqq c \leqq OB,$$

ou $$-\sqrt{a^2+b^2} \leqq c \leqq +\sqrt{a^2+b^2},$$

ou $$c^2 \leqq a^2+b^2.$$

É a condição que já foi deduzida analìticamente.

200. — Exercício VIII. — ***Calcular 2 arcos* x *e* y, *conhecendo sua soma* a, *assim como a soma* b *dos senos, dos co-senos ou das tangentes.***

Chamando x e y os arcos, o problema consiste em resolver um dos 3 sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=b \end{array}\right\} \text{(I)} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=a \\ \cos x+\cos y=b \end{array}\right\} \text{(II)}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=b \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Em cada sistema, poderíamos eliminar um dos arcos entre 2 equações e calcular o outro diretamente.

Mas quando se conhece a soma de 2 arcos incógnitos, é vantajoso adotar como incógnita auxiliar uma função trigonométrica da diferença desses arcos. Já vimos uma aplicação na resolução do triângulo obliquângulo (2.º Caso). Eis a solução do primeiro sistema. Deixamos aos alunos como exercício a resolução dos outros dois.

Resolução de $\qquad x+y=a \qquad (1)$

e $\qquad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=b. \qquad (2)$

A equação (2) dá (**49**):

$$2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}=b,$$

ou, por causa de (1):

$$\cos \frac{x-y}{2}=\frac{b}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}}. \qquad (3)$$

Para que (3) tenha solução, devemos ter:

$$-1 \leq \frac{b}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}} \leq 1$$

ou

$$b^2 \leq 4\, sen^2 \frac{a}{2}. \qquad (4)$$

Resolvendo a equação (3), as táboas dão um ângulo m tal que $\frac{x-y}{2} = m$ e a solução completa de (3) é:

$$\frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm m. \tag{5}$$

Combinada com a equação (1), essa equação (5) dá:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + 2k\pi \pm m, \\ y &= \frac{a}{2} - 2k\pi \mp m. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

São as raizes de (1) e (2) desde que estiver satisfeita a condição de possibilidade (4).

Em cada grupo de raízes, k deverá ser tomado com o mesmo valor e m com sinal contrário.

201. — Exercício IX. — ***Calcular 2 arcos* x *e* y *conhecendo sua soma* a, *assim como o produto* b *das suas tangentes.***

Temos o sistema:

$$x + y = a, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b. \tag{2}$$

Tomemos as tg de cada membro de (1); vem:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} a,$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} a;$$

ou, por causa de (2):

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1-b)\operatorname{tg} a.$$

Empregando a fórmula (55), essa equação dá:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y} = (1-b)\operatorname{tg} a;$$

ou, por causa de (1):

$$\cos x \cos y = \frac{\text{sen}\, a}{\text{tg}\, a\,(1-b)} = \frac{\cos a}{1-b}.$$

Multipliquemos ambos os membros por 2 e apliquemos a fórmula (**53**), temos:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{2\cos a}{1-b},$$

ou, por causa de (1):

$$\cos(x-y) = \cos a\left(\frac{2}{1-b} - 1\right) = \left(\frac{1+b}{1-b}\right)\cos a. \quad (3)$$

Essa equação requer a condição:

$$-1 \leqq \frac{1+b}{1-b}\cos a \leqq 1;$$

ou

$$\left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2 \cos^2 a \leqq 1. \quad (4)$$

Satisfeita essa condição de possibilidade, a equação (3) dá a diferença $x-y$. Conhecida a soma (1), vêm logo x e y.

202. — Exercício X. — ***Calcular os arcos* x *e* y*, conhecendo sua soma* a*, assim como o quociente* b *dos senos.***

Temos as equações:

$$x + y = a \quad (1)$$

$$\frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, y} = b. \quad (2)$$

Aplicando uma propriedade das proporções, a equação (2) dá:

$$\frac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, y}{\text{sen}\, x + \text{sen}\, y} = \frac{b-1}{b+1};$$

donde (n.º 147):

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y)} = \frac{b-1}{b+1}.$$

ou, por causa de (1):

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{b-1}{b+1} \operatorname{tg} \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

Não há condição de realidade; essa equação (3) dá sempre a diferença $\frac{x-y}{2}$. Utilizando a equação (1), vêm logo x e y.

203. — Exercício XI. — *Resolver a equação:*

$$\text{arco sen } x = \text{arcos cos } x\sqrt{3}.$$

Essa equação exprime què certo arco tem x por seno e $x\sqrt{3}$ por co-seno e deve-se calcular x. Por causa da relação fundamental **12**, podemos escrever:

$$x^2 + 3x^2 = 1;$$

donde vem $\quad 4x^2 = 1 \quad$ e $\quad x = \pm \frac{1}{2}.$

Os senos $\pm \frac{1}{2}$ correspondem aos arcos de 30°, 150°, 210°, 330°; a equação é verificada sòmente para os ângulos de 30° e 210°.

Logo, $x = \pm \frac{1}{2}$ corresponde aos arcos $k\pi + 30°$.

204. — Exercício XII. — *Resolver a equação:*

$$\text{arco tg } x + \text{arco tg } \frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Façamos $\text{arco tg}\, x = a$, vem $\text{tg}\, a = x$; façamos também

$$\text{arco tg}\frac{x}{x+1} = b; \quad \text{vem} \quad \text{tg}\, b = \frac{x}{x+1}.$$

A equação proposta vem a ser:

$$a+b = \frac{\pi}{4},$$

ou, tomando as tangentes de cada membro (**26**):

$$\frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1-\text{tg}\, a\, \text{tg}\, b} = 1,$$

ou substituindo tg a tg b pelos seus valores como acima, vem:

$$\frac{x + \dfrac{x}{x+1}}{1 - \dfrac{x^2}{x+1}} = 1;$$

ou

$$2x^2+x-1 = 0.$$

Esta equação é satisfeita para $x' = \dfrac{1}{2}$ e $x'' = -1$.

Deixamos ao aluno o cuidado de verificar as raízes. O segundo valor de x requer uma interpretação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

179. — Resolver as equações seguintes:

(a) $\text{tg}\, x = 5 \,\text{sen}\, x$

(b) $\text{tg}\, 2(x) = 5\, \text{tg}\, x$.

(c) $2\, \text{tg}\, x + 2\, \text{cotg}\, x = 5$.

180. — Resolver a equação:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{tg}^2 x} + \frac{1}{\text{cotg}^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\text{cosec}^2 x} - \frac{1}{\text{sen}^2 x} = 3.$$

181. — Resolver a equação:

$$\text{tg}\left(2x+\frac{\pi}{8}\right) = \text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

182. — Resolver o sistema de equações:

(1) $x + y = a.$

(2) $\cos x + \cos y = b.$

Dizer a condição de possibilidade.

183. — Resolver o sistema de equações:

(1) $x + y = a.$

(2) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + b.$

Dizer qual é a condição de possibilidade.

184. — Resolver os sistemas seguintes e dizer as condições de possibilidade:

$$\text{I} \begin{cases} (1) & x + y = a \\ (2) & \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = b. \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} (1) & x + y = a \\ (2) & \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

185. — Resolver o sistema:

$$x + y = a$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = b$$

186. — Resolver o sistema:

$$(1) \quad \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = 2.$$

$$(2) \quad 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1.$$

187. — Resolver o sistema:

$$(1) \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} a \cos b$$

$$(2) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos a \cos b$$

188. — Resolver a equação:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x = 45^\circ.$$

189. — Resolver a equação:

$$2 \operatorname{arc} \cos y - \operatorname{arc} \operatorname{sen} y = 0$$

e verificar as raízes.

190. — Mostrar que a relação

$$\operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$$

é verificada para todos os valores do arco x.

TERCEIRA PARTE

Trigonometria esférica

UNIDADE XIX

NOÇÕES DE GEOMETRIA ESFÉRICA

205. — Trigonometria esférica. — As fórmulas até agora estabelecidas referem-se a triângulos em que os lados são linhas retas. Fizemos numerosas aplicações dessas fórmulas e problemas que comportavam distâncias geográficas e pudemos aceitar os resultados desde que essas distâncias não fossem muito grandes. Porém, como a terra oferece uma forma aproximadamente esférica, não poderíamos aplicar as mesmas fórmulas a triângulos em que os lados tivessem grande extensão, (como do Rio de Janeiro a Natal, por exemplo) sem cometer um erro de aproximação muito notável.

O mesmo acontece com os problemas de astronomia que se referem a triângulos da esfera celeste.

Por esses motivos, vamos estudar nesta 3.ª Parte as fórmulas relativas aos triângulos esféricos.

206. — Geometria da esfera. — Para a compreensão perfeita da trigonometria plana tivemos que recorrer frequentemente a propriedades geométricas da geometria plana e especialmente dos triângulos. Do mesmo modo o estudo da trigonometria esférica requer o conhecimento de muitos princípios e propriedades que se referem à esfera.

Recomendamos aos alunos um estudo cuidadoso do que diz respeito às propriedades das retas e planos do espaço (Geom. F. T. D. c/sup. Livro V) e o que se refere à geometria da esfera (Livro VII — Esfera).

Para os alunos que já possuem essas noções daremos aqui uma breve recapitulação das propriedades que mais interesam o nosso estudo. Para uma demonstração rigorosa, referir-se aos livros de geometria.

207. — Secções planas da esfera. — ***Toda secção plana de uma esfera é um círculo.***

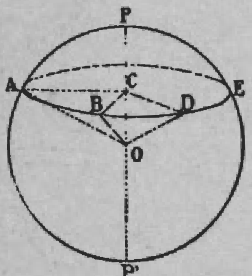

FIG. 141.

Na fig. 141, a secção é um círculo de centro C e raio AC.

Do centro O, da esfera, tracemos OC e prolonguemos até as intersecções com a esfera em P e P'. Obtemos assim um diâmetro, perpendicular ao círculo da secção: é o *eixo* do círculo C.

208. — Círculo máximo. — Um ***círculo máximo*** da esfera resulta da secção por um plano que passa pelo centro. O raio do círculo máximo é igual ao raio da esfera.

Numa mesma esfera, todos os círculos máximos são iguais, porque todos têm como raio o raio da esfera.

Por dois pontos dados sobre uma esfera é sempre possível fazer passar um círculo máximo; este círculo resulta da secção por um plano que passa pelos dois pontos e pelo centro da esfera.

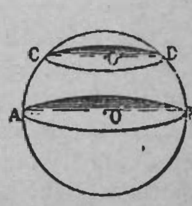

FIG. 142.

Dois círculos máximos cortam-se mùtuamente em duas partes iguais.

209. — Polos. — ***Polos de um círculo da esfera são as extremidades*** P e P' (fig. 142) ***do eixo desse círculo.***

Cada círculo tem dois polos e todos os círculos paralelos têm mesmos polos.

Cada polo de um círculo dista igualmente de todos os pontos desse círculo.

220. — Plano tangente e reta tangente; normal. — ***Um plano é tangente à esfera quando tem só um ponto comum com a esfera.***

Normal à esfera é a perpendicular ao plano tangente no ponto de contacto.

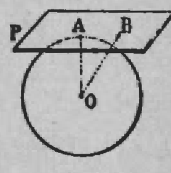

FIG. 143.

Todo plano perpendicular à extremidade de um raio é tangente à esfera.

Toda reta do plano tangente que passe pelo ponto de contacto é ***reta tangente à esfera*** nesse mesmo ponto.

221. — Distância esférica. — Sejam A e B dois pontos de uma esfera O. Por esses pontos e pelo centro da esfera passemos em plano secante. Obtemos um círculo máximo que contém esses pontos.

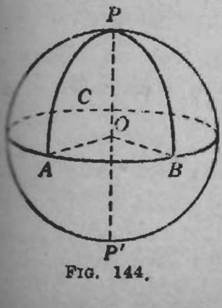

FIG. 144.

Distância entre os pontos A e B de uma esfera é, por definição, ***o comprimento do menor arco de círculo máximo que passa por esses pontos.***

Demonstra-se que essa distância é o arco mais curto, que pode ser traçado entre dois pontos da esfera.

222. — Ângulo esférico. — ***Ângulo esférico*** é a figura formada por dois arcos de círculos máximos traçados por um mesmo ponto P, da esfera. O ponto comum é o vértice do ângulo.

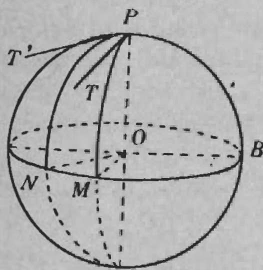

FIG. 145.

Medida de um ângulo esférico é o ângulo plano formado pelas tangentes T e T' (fig. 145) aos lados do ângulo e traçadas pelo vértice do ângulo.

Tracemos o círculo máximo correspondente ao polo P e prolonguemos os lados do ângulo formado em P.

Sejam M e N as intersecções desses lados com o círculo máximo do polo P.

Os raios OM e ON são paralelos respectivamente às tangentes T e T' e o ângulo TPT' é igual ao ângulo MON.

O ângulo MON tem por medida o arco MN, de tal modo que:

O ângulo esférico tem por medida o arco do círculo máximo traçado pelo seu vértice como ***polo e limitado aos seus lados.***

Tem ainda por medida o diedro formado pelos planos dos círculos máximos que contêm os lados do ângulo.

O ângulo esférico P será ***agudo, reto*** ou ***obtuso,*** conforme o ângulo formado pelos raios OM e ON for agudo, reto ou obtuso.

223. — Triângulo esférico. — Três pontos de uma esfera ligados dois a dois por meio de 3 arcos de círculos máximos formam uma figura denominada ***triângulo esférico.***

Os três pontos dados A, B e C formam os vértices do triângulo. Para que haja triângulo é necessário que os três pontos não pertençam ao mesmo círculo máximo.

Os ângulos são medidos em graus.

Os lados a, b e c opostos respectivamente aos ângulos A, B e C, podem ser medidos em unidades de compri- ou em unidades de arco. No primeiro caso dependem do raio da esfera; no segundo caso independem desse mesmo raio.

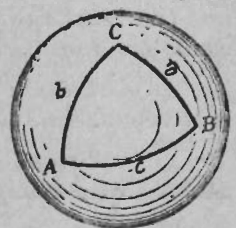

FIG. 146.

Consideraremos neste estudo triângulos esféricos em que os lados são arcos menores do que 180°; tais triângulos são ***convexos.***

Os termos triângulo esférico ***isósceles, equilátero, rectângulo,*** ou ***obliquângulo*** são utilizados no mesmo sentido do que em geometria plana.

Um triângulo esférico pode ter 1, 2 ou 3 ângulos retos; teremos assim os triângulos ***rectângulo, birretângulo*** e ***trirretângulo.***

224. — Triedro. — Traçando-se os raios da esfera que correspondem aos vértices do triângulo esférico obtém-se um ***triedro.***

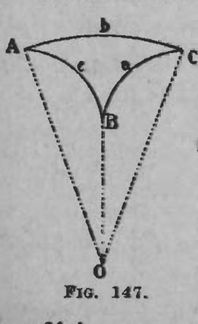

FIG. 147.

Os ***ângulos planos*** do triedro, AOB, AOC, BOC, têm mesma medida dos que os lados que lhes correspondem c, b e a no triângulo esférico.

Os ***ângulos diedros*** do triedro têm mesma medida do que os ângulos esféricos que correspondem a cada um desses diedros.

Assim, o triedro ***trirretângulo*** que corresponde a um triângulo esférico trirretângulo, tem 3 ângulos planos de 90° e 3 ângulos diedros de 90°; corresponde a $1/8$ da esfera.

225. — Soma dos ângulos de um triedro. — Demonstram-se em geometria (c. sup. ns. 477, 479, 482) as propriedades seguintes:

(a) ***Em um triedro, cada face é menor do que a soma das duas outras.***

(b) ***A soma dos ângulos planos de um triedro é menor do que 4 retos ou 360°.***

(c) ***A soma dos ângulos diedros de um triedro está sempre compreendida entre 2 retos e 6 retos*** mesmo raio.

226. — Soma dos lados e dos ângulos do triângulo esférico. — Das propriedades enunciadas nos números 224 e 225, deduzem-se os princípios seguintes:

(a) ***A soma de dois lados de um triângulo esférico é maior do que o terceiro lado.***

(b) ***A soma dos 3 lados de um triângulo esférico*** (quando medidos em graus) ***é menor do que 360°.***

(c) ***A soma dos ângulos de um triângulo esférico está sempre compreendida entre 2 retos e 6 retos.***

227. — Congruências. — Dois triedros são congruentes quando os ângulos planos e os ângulos diedros de um deles são respectivamente iguais aos ângulos planos e aos ângulos diedros do outro e dispostos na mesma ordem.

Se os elementos iguais do segundo forem dispostos em ordem inversa, os dois triedros são ***simétricos.***

Os triângulos esféricos correspondentes a triedros, congruentes de uma mesma esfera, são também *congruentes.*

Dois triângulos esféricos cujos vértices são diametralmente opostos são ***simétricos*** (fig. 148) assim como os triedros correspondentes.

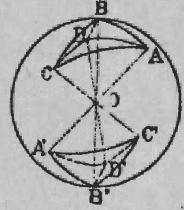

FIG. 148.

Demonstram-se os seguintes teoremas relativos aos triângulos esféricos congruentes:

Dois triângulos esféricos de uma mesma esfera ou de esferas iguais, cujas partes estão dispostas na mesma ordem, são congruentes desde que:

(a) ***Dois lados e o ângulo compreendido de um dos triângulos sejam iguais às partes correspondentes do outro triângulo.***

(b) ***Dois ângulos e o lado adjacente de um dos triângulos sejam iguais aos elementos correspondentes do outro.***

(c) ***Os três lados de um deles sejam iguais aos três lados do outro.***

(d) ***Os três ângulos de um deles sejam iguais aos três ângulos do outro.***

Um triângulo esférico ***de uma esfera dada*** é, portanto, ***determinado*** desde que se conheçam dois lados e o ângulo compreendido, ou dois ângulos e o lado compreendido, ou os três lados, ou, ainda, os três ângulos.

228. — Excesso esférico — Área do triângulo esférico — Seja s a soma dos ângulos de um triângulo e consideremos a diferença

$$E = s - 180^\circ. \qquad (1)$$

Essa diferença entre 180° e s, é o ***excesso esférico*** do triângulo considerado. Medido em retos esse excesso tem por expressão:

$$\frac{E}{90} \qquad (2)$$

Avaliada em triângulo trirretângulos a esfera tem como área 8 (n.° 224).

Se adotarmos como unidades de ângulo o ***ângulo reto*** e como unidade de área o ***triângulo trirretângulo,*** demonstra-se que (Geom., c. sup., 671)

A área de um triângulo esférico é igual ao seu excesso esférico.

O triângulo trirretângulo é a oitava parte da esfera; logo, em função do raio, essa área se exprime por:

$$\frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}. \qquad (3)$$

A área de um triângulo esférico, em função do raio é, pois, igual a:

$$\boxed{S = \frac{E}{90} \times \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2 E}{180}} \qquad (86)$$

fórmula em que E exprime em graus o excesso esférico.

Se fizermos $R = 1$, a área será dada em ***esferor-radianos*** pela expressão $\frac{\pi E}{180}$.

Esferorradiano é o ângulo sólido que subtende na superfície de qualquer esfera com centro no seu vértice, uma área igual a $\frac{1}{4\pi}$ da área total da mesma esfera. A área da esfera sendo $4\pi R^2$, a área correspondente a 1 esferodiano, numa esfera de raio R, é R^2, ou área de um quadrado de lado R.

229. — Resolução do triângulo esférico. — Para a resolução do triângulo plano deviamos conhecer 3 elementos entre os quais ***pelo menos um lado.*** Do mesmo modo veremos que, em geral, esses mesmos dados são necessários para a resolução do triângulo esférico.

Entretanto, vimos, no número 224, que um triângulo esférico é também determinado, quando dele se conhecem os 3 ângulos. Poderemos então calcular, ***em graus***, os seus 3 lados. Porém, para termos os lados em unidades de comprimento, deveremos conhecer, também, neste caso, o raio da esfera à qual o triângulo pertence.

EXERCÍCIOS ORAIS

1. — Que se entende por ***secção plana*** de uma esfera?

2. — Que é ***círculo máximo*** de uma esfera?

3. — Dizer se é verdade que:

(*a*) Duas esferas do mesmo raio tem círculos máximos iguais.

(*b*) O ***eixo*** de um pequeno círculo é perpendicular a um só círculo máximo.

(*c*) Dois círculos máximos cortam-se formando 2 semi-círculos iguais.

(*d*) Todo eixo de um círculo da esfera é diâmetro da mesma esfera.

4. — Que são ***polos*** de um círculo máximo?

5. — Que é ***tangente*** à esfera? — ***normal*** à esfera?

6. — Dizer o que há de verdade e o que há de errado na seguinte proposição: Toda tangente a uma esfera num ponto *P* é também tangente aos círculos máximos que passam por esse ponto.

7. — Que é ângulo esférico?

8. — Qual é a medida angular de um ângulo esférico?

9. — Se dois lados de um triângulo esférico tiverem respectivamente 90° e 120° qual é, em graus, o valor máximo do 3.º lado? — o valor mínimo?

10. — Podem os lados de um mesmo triângulo esférico ser respectivamente 95°, 105°, 270?

11. — Dois planos formam um ângulo diedro de 20° e contêm o diâmetro de uma esfera. Que ângulo esférico é determinado pelas suas intersecções com a esfera?

12. — Um triedro tem o seu vértice no centro de uma esfera. Tem ângulos planos de 20°, 50° e 70°. Quais são os lados do triângulo esférico correspondente?

13. — Os diedros de um triedro têm respectivamente 20°, 110° e 60°. Quais são os ângulos do triângulo esférico correspondente?

14. — Que são triângulos esféricos ***congruentes?***

15. — É o triângulo ***birretângulo*** um triângulo isósceles? Qual é, em graus, o comprimento de seus lados iguais?

16. — Qual é, em graus, o comprimento dos lados de um triângulo ***trirretângulo?***

17. — Qual é o excesso esférico de um triângulo cujos ângulos medem 58°, 35° e 70°?

18. — Qual é a área de triângulo esférico **birretângulo** em que um dos lados tem 20°? Calcular essa área, por meio da teoria dos ***fusos*** esféricos e por meio do excesso esférico.

19. — Que dados são necessários e suficientes para a resolução de um triângulo esférico?

20. — Dados os 3 ângulos de um triângulo esférico, podemos calcular os 3 lados em graus? — a área em quadrantes? — a área em m^2?

ângulos planos, as propriedades da figura em nada s alteram e obtemos as fórmulas (**93**), (**94**) e (**92**) qu poderíamos, aliás, demonstrar de modo análogo.

(12) Temos ainda:

$$\cos C = \frac{DE}{DF} = \frac{OE \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = \frac{\cos c \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}.$$

ou, substituindo-se sen a pelo seu valor tirado de (**92** e simplificando:

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B.$$

É a fórmula (**90**).

(13) Uma observação análoga a (11) permite escre ver a fórmula (**95**), por analogia com (**90**).

(14) $\cos a = OD = OE \cos b$.

logo: $\cos a = \cos b \cos c$ (fórmula **91**).

(15) Substituindo em (**91**) o valores

$$\cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B} \quad \text{e} \quad \cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$$

tirados de (**90**) e (**95**), temos:

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} C \quad \text{(fórmula \textbf{96})}.$$

233. — Generalização — Uso das fórmulas. — Embora a demonstração dessas fórmulas tenha sido feit apenas para arcos inferiores a 90°, pode-se demonstra que elas se aplicam, geralmente, para qualquer arc (ângulo ou lado). Ocupar-nos-emos aqui dos arcos de (até 180°. Há, no entanto, algumas exceções e também nem todas as soluções são aceitáveis.

1) Em primeiro lugar, no caso dos triângulos birr tângular e trirretangular, as fórmulas em que entr tg 90° não são aplicáveis, pois nesses casos a tangent

é infinita e as fórmulas não conduzem a resultados numéricos definidos.

2) As fórmulas não conduzem diretamente à determinação dos lados ou dos ângulos mas a alguma equação simples da forma: sen $b = m$, cos $c = n$, etc. Essas equações permitem determinar b, c, etc.

Notemos, porém, que, para arcos compreendidos entre 0° e 180°, a equação sen $b = m$ fornece duas determinações do lado b: b e $180° - b$.

As relações que existem entre os elementos do triângulo considerado permitirão determinar se as duas determinações são aceitáveis, ou, se apenas uma delas deve ser conservada. Vamos ver, no parágrafo seguinte, algumas regras práticas que servem para esclarecer essa dificuldade.

234. — Regras práticas. — Diremos que dois arcos são do ***mesmo quadrante*** quando ambos forem compreendidos entre 0° e 90° ou entre 90° e 180°; pelo contrário, dois arcos são de ***quadrantes diferentes*** se um deles estiver compreendido entre 0° e 90° e o outro entre 90° e 180°, ou reciprocamente.

1.ª Regra. — ***Em todo triângulo esférico retângulo, o lado* b *e o ângulo* B *são medidos por arcos do mesmo quadrante; também os arcos* c *e* C *são do mesmo quadrante.***

Com efeito, consideremos a fórmula (**89**)

$$\text{tg}\, c = \text{sen}\, b \ \text{tg}\, C.$$

Entre 0° e 180°, sen b é sempre positivo; portanto tg c e tg C devem ser ambos de mesmo sinal; para isto é necessário que c e C sejam ambos do primeiro quadrante, ou ambos do segundo quadrante.

A fórmula (**94**), mostraria também que os arcos b e B devem ser do mesmo quadrante.

2.ª Regra. — ***Em todo triângulo retângulo esférico, se o lado* a *(hipotenusa) for menor do que 90°, os lados* b *e* c *serão do mesmo quadrante.***

Com efeito, consideremos a fórmula (**91**):

$$\cos a = \cos c \cos b.$$

Se o arco c for inferior a 90°, $\cos c$ será positivo; logo, $\cos a$ e $\cos b$ deverão ter o mesmo sinal; isto é, a e b deverão pertencer ambos ao 1.° quadrante ou ambos ao 2.° quadrante.

3.ª Regra. — ***Em todo triângulo retângulo, se o lado* a *for maior do que 90°, os lados* b *e* c *deverão ser arcos de quadrantes diferentes.***

A mesma fórmula (**91**) mostra que se $\cos a$ for negativo, $\cos b$ e $\cos c$ deverão ter sinais contrários; isto é, b e c deverão ser de quadrantes diferentes.

4.ª Regra. — **Número de soluções.** — De modo geral, pode-se dizer que o triângulo retângulo esférico admite duas soluções ***quando são dados um ângulo*** (diferente do ângulo reto) ***e o lado oposto.***

Isto resulta imediatamente da conclusão do número 227. É fácil mostrar que neste caso, acrescentando-se aos dados do problema o ângulo reto A obtemos os dados seguintes:

$$b,\ B,\ A \qquad \text{ou} \qquad c,\ C,\ A;$$

em cada um desses casos o triângulo ***não é determinado;*** há ***ambiguidade.*** A discussão das fórmulas conduz ao mesmo resultado e as regras precedentes permitem estabelecer os grupos de respostas convenientes a cada caso.

Alguns exemplos práticos servirão para mostrar como devem ser identificadas as soluções aceitáveis.

235. — Regra circular de Napier[1]. — O algoritmo que segue, permite obter fàcilmente as fórmulas que se referem a cada caso particular na resolução dos triângulos retângulos esféricos, de acordo com os dados do problema.

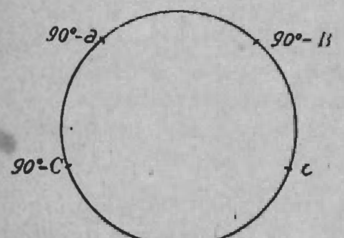

Fig. 150.

Sobre um círculo marquemos cinco pontos que fazemos corresponder às letras b e c e aos complementos dos elementos a, B e C de um triângulo retângulo de acordo com a disposição da fig. 150.

Notemos que cada elemento assim disposto tem dois elementos ***adjacentes*** e dois elementos ***opostos***.

Regra I. — ***O seno de um elemento qualquer é igual ao produto das tangentes dos dois elementos adjacentes.***

Regra II. — ***O seno de um elemento qualquer é igual ao produto dos co-senos dos dois elementos que lhe são opostos.***

Exemplos. — **I.** Pela regra (I) temos, por exemplo:

$$\text{sen } (90^\circ - a) = \text{tg } (90^\circ - C) \times \text{tg } (90^\circ - B)$$

ou $\cos a = \text{cotg } C \text{ cotg } B$. **É a fórmula (96).**

Pela regra (II) temos, por exemplo:

$$\text{sen } (90^\circ - B) = \cos (90^\circ - C) \times \cos b$$

ou $\cos B = \text{sen } C \cos b$. **É a fórmula (95).**

II. — ***Quais são as fórmulas que servem para a resolução do triângulo retângulo esférico do qual se conhecem: c e B.***

---

[1] John Napier, matemático Escossês (1550-1617).

Teremos:

1.° $\operatorname{sen}(90^\circ - C) = \cos(90^\circ - B)\cos c$

ou $\quad \mathbf{\cos C = \operatorname{sen} B \cos c}$ **(90).**

2.° $\operatorname{sen} c = \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg}(90^\circ - B)$

ou $\quad \operatorname{sen} c = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B$

donde: $\quad \mathbf{tg}\, \boldsymbol{b} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{cotg} B} = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B$ **(94).**

3.° $\operatorname{sen}(90^\circ - B) = \operatorname{tg}(90^\circ - a) \times \operatorname{tg} c$

ou $\quad \cos B = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{tg} c$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos B}{\operatorname{tg} c} \text{ ou } \mathbf{tg}\, \boldsymbol{a} = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B} \quad \textbf{(93).}$$

EXERCÍCIOS ORAIS

1. — Dizer por que é que os seguintes dados não podem constituir os elementos de um triângulo retângulo esférico (n.° 234):

(**a**) $C = 70^\circ$, $c = 100^\circ$.
(**b**) $a = 70^\circ$, $b = 105^\circ$, $c = 40^\circ$.
(**c**) $B = 95^\circ$, $b = 75^\circ$.
(**d**) $A = 110^\circ$, $b = 30^\circ$, $B = 120^\circ$.
(**e**) $c = 100^\circ$, $C = 20^\circ$.
(**f**) $a = 92^\circ$, $b = 100^\circ$, $c = 95^\circ$.

2. — Mostrar, sem resolver o triângulo, que os casos correspondentes aos seguintes dados admitem uma única solução (n.° 234):

(**a**) $b = 85^\circ$, $c = 70^\circ$
(**b**) $c = 100^\circ$, $b = 80^\circ$
(**c**) $C = 120^\circ$, $b = 70^\circ$
(**d**) $B = 70^\circ$, $c = 20^\circ$

3. — Mostrar que nos casos seguintes haverá duas soluções:

(**a**) $b = 30^\circ$, $B = 70^\circ$; (**b**) $C = 110^\circ$, $c = 70^\circ$.

4. — Por meio do algoritmo circular de Napier, determinar as fórmulas que servem para a resolução dos casos seguintes; dados:

(**a**) B, c
(**b**) C, a
(**c**) C, c
(**d**) B, C.

5. — Dizer se cada uma das seguintes proposições está certa ou errada; e por que?

(*a*) Para se resolver um triângulo esférico, um dos lados deve figurar entre os dados.

(*b*) Um triângulo retângulo esférico do qual conhecemos $C = 125°$ e $b = 70°$ está perfeitamente determinado.

(*c*) Um triângulo retângulo pode ter como lados:

$$a = 88°, \quad b = 95°.$$

(*e*) Se, num triângulo retângulo, tivermos: $b = c = 90°$, também teremos necessàriamente $a = 90°$.

(*f*) Se, num triângulo retângulo, tivermos:

$$c = 20° \quad \text{e} \quad B = 90°$$

também teremos $a = b = 90°$.

236. — Exercícios resolvidos. — I. Resolver um triângulo retângulo esférico com os dados seguintes:

$$C = 80°, \quad a = 100°; \quad \text{calcular } B, c, \text{ e } b.$$

Fórmulas. — A regra de Napier dá logo as fórmulas seguintes (**96, 87, 88**):

$$(1) \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{\cos a}{\operatorname{cotg} C} = \cos a \operatorname{tg} C.$$

$$(2) \qquad \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C.$$

$$(3) \qquad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C.$$

1.° A fórmula (1) dá:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\cos 110°}{\operatorname{cotg} 80°} = \frac{-\operatorname{sen} 20°}{\operatorname{cotg} 80°}.$$

Portanto, cotg B é negativa e o ângulo B é do 2.° quadrante. Teremos, com aproximação de minuto:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} 20° &= \bar{1},534\ 0517 \\ \operatorname{colog} \operatorname{cotg} 80° &= 0,753\ 6812 \\ \hline \log \operatorname{cotg} (180°-B) &= 0,287\ 7328 \\ 180°-B &= 27°\ 16' \\ \mathbf{B} &= \mathbf{152°\ 44'} \end{aligned}$$

2.° A fórmula (2) dá, com aproximação de minuto:

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} 110° \times \operatorname{sen} 80° = \operatorname{sen} 70° \operatorname{sen} 80°.$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} 70° &= \bar{1},972\ 9858 \\ \log \operatorname{sen} 80° &= \bar{1},993\ 3515 \\ \hline \log \operatorname{sen} c &= \bar{1},966\ 3373 \\ \mathbf{c} &= \mathbf{67°\,44'} \quad \text{e} \quad \mathbf{112°\,16'} \end{aligned}$$

Pela "*1.ª Regra*" do número 234, o segundo valor de c deve ser rejeitado. Isto confirma, aliás, a "*4.ª Regra*", segundo a qual, o caso admite apenas uma solução.

3.º A fórmula (3) dá:

$$\text{tg } b = \text{tg } 110^\circ . \cos 80^\circ = -\text{tg } 70^\circ \cos 80^\circ .$$

$$\begin{aligned} \log \text{tg } 70^\circ &= 0{,}438\ 9341 \\ \log \cos 80^\circ &= \bar{1}{,}239\ 6702 \\ \hline \log \text{tg } (180^\circ - b) &= \bar{1}{,}678\ 6043 \\ 180^\circ - b &= 25^\circ\, 30' \\ b &= 154^\circ\, 30' \end{aligned}$$

Verificação. — Utilizaremos para esse fim uma fórmula que que encerre os 3 elementos procurados, aqui a fórmula (**94**):

$$\begin{aligned} \text{tg } b &= \text{sen } c \text{ tg B.} \\ &= \text{sen } 67^\circ\, 44' \times \text{tg } 152^\circ\, 44' \\ &= -\text{sen } 67^\circ\, 44' \times \text{tg } 27^\circ\, 16' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{sen } 67^\circ\, 44' &= \bar{1}{,}966\ 3437 \\ \log \text{tg } 27^\circ\, 16' &= \bar{1}{,}712\ 1461 \\ \hline \log \text{tg } (180^\circ - b) &= \bar{1}{,}678\ 4898 \\ 180^\circ - b &= 25^\circ\, 30' \\ b &= 154^\circ\, 30' \end{aligned}$$

Este resultado confere com o valor calculado. Notemos, entretanto, que a verificação também daria certo no caso em que tivéssemos tomado, erradamente, o segundo lado c que foi rejeitado na seleção feita.

II. — ***Resolver o triângulo retângulo esférico do qual se conhecem*** $B = 42^\circ\, 10'$ ***e*** $b = 35^\circ\, 40'$. ***Calcular:*** C, a *e* c.

Este caso oferecerá duas soluções (234).

A regra de Napier fornece logo as fórmulas de resolução (**95, 92, 94**):

(1) $\cos B = \text{sen } C \cos b$; ou: $\text{sen } C = \dfrac{\cos B}{\cos b}$.

(2) $\text{sen } b = \text{sen } a \text{ sen } B$; ou: $\text{sen } a = \dfrac{\text{sen } b}{\text{sen } B}$.

(3) $\text{tg } b = \text{sen } c \text{ tg } B$; ou: $\text{sen } c = \dfrac{\text{tg } b}{\text{tg } B}$.

1.º A fórmula (1) dá:

$$\text{sen } C = \frac{\cos 42^\circ 10'}{\cos 35^\circ 40'}.$$

$$\begin{aligned} \log \cos 42^\circ 10' &= \bar{1},869\ 9326 \\ \text{colog} \cos 35^\circ 40' &= 0,090\ 2179 \\ \hline \log \text{sen } C &= \bar{1},960\ 1505 \\ C &= 65^\circ 50' \\ \text{e} \quad C' &= 114^\circ 10'. \end{aligned}$$

2.º A fórmula (2) dá:

$$\text{sen } a = \frac{\text{sen } 35^\circ 40'}{\text{sen } 42^\circ 10'}.$$

$$\begin{aligned} \log \text{sen } 35^\circ 40' &= \bar{1},765\ 7197 \\ \text{colog sen } 42^\circ 10' &= 0,173\ 0902 \\ \hline \log \text{sen } a &= \bar{1},938\ 8099 \\ a &= 60^\circ 18' \\ \text{e} \quad a' &= 199^\circ 42' \end{aligned}$$

3.º A fórmula (3) dá:

$$\text{sen } c = \frac{\text{tg } 35^\circ 40'}{\text{tg } 42^\circ 10'}$$

$$\begin{aligned} \log \text{sen } 35^\circ 40' &= \bar{1},855\ 9376 \\ \text{colog sen } 42^\circ 10' &= 0,043\ 0228 \\ \hline \log \text{sen } c &= \bar{1},898\ 9604 \\ c &= 52^\circ 25' \\ \text{e} \quad c' &= 127^\circ 35' \end{aligned}$$

De acordo com as regras do número 234, as diferentes respostas dão as duas soluções seguintes:

1.ª Solução	2.ª Solução
$a = 60^\circ 18'$	$a = 119^\circ 42'$
$B = 42^\circ 10'$	$B = 42^\circ 10'$
$b = 36^\circ 50'$	$b = 36^\circ 50'$
$c = 52^\circ 25'$	$c = 127^\circ 35'$
$C = 65^\circ 50'$	$C = 104^\circ 10'$

1.ª Solução: Para $a < 90°$, b e c devem ser do mesmo quadrante. Ora, como b é do 1.º quadrante, devemos escolher o valor de c no primeiro quadrante. O ângulo C devendo ser do mesmo quadrante do que o lado c, segue-se que a resposta conveniente é aquela que é menor do que 90°.

2.ª Solução: Um raciocínio análogo, que deixamos ao aluno, como exercício, mostrará a concordância dos resultados com as regras do número 234.

VERIFICAÇÃO: Pela fórmula (**87**), que contém os elementos calculados

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$$

$$\operatorname{sen} 52°\,25' = \operatorname{sen} 60°\,18' \operatorname{sen} 65°\,50'$$

$$\begin{array}{rl} \mathbf{1{,}898\ 9812} = & \mathbf{\bar{1}{,}938\ 8356} \\ & \mathbf{\bar{1}{,}960\ 1655} \\ \hline & \mathbf{1{,}899\ 0011} \end{array}$$

A aproximação é suficiente para o caso.

Nota. — A figura 151 representa as duas soluções deste problema.

Seja A o ângulo reto, $B = B'$ o ângulo dado e b o lado oposto. No fuso BB' o lado b forma os dois triângulos ABC e $AB'C$.

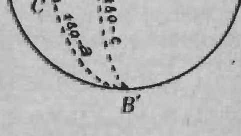

FIG. 151.

VERIFICAÇÃO PELAS ÁREAS. — O excesso esférico do triângulo ABC é:

$E = (90°+42°10'+65°50')-180 = 18°$.

E a área correspondente, em esferodianos (n.º 228):

$$\frac{18\,\pi}{180}.$$

O excesso esférico de $AB'C$ é:

$$E' = (90° + 42°\,10' + 104°\,10') - 180° - 56°.$$

E a área aproximada correspondente:

$$\frac{56\,\pi}{180}$$

A área do fuso $B\,B'$ é a soma das áreas dos dois triângulos, ou:

$$F = \frac{18\,\pi}{180} + \frac{66\,\pi}{180} = \frac{74\,\pi}{180}.$$

Um cálculo direto do fuso de $36^\circ\,50'$ ou aproximadamente 37°, dá também:

$$F = \frac{4\,\pi \times 37}{360} = \frac{74\,\pi}{180}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios que seguem, todos os dados se referem ao triângulo esférico retângulo convexo (lados menores do que 180°).

191. — Dados: $B = 72^\circ\,1'$ e $c = 52^\circ\,20$; calcular b.

192. — Dados: $b = 20^\circ\,35'$ e $c = 72^\circ$; calcular B.

193. — Dados: $C = 46^\circ$ e $a = 85^\circ$; calcular B.

194. — Dados: $C = 57^\circ$ e $c = 32^\circ$; calcular B.

195. — Dados: $B = 22^\circ$ e $b = 45^\circ$; calcular a.

196. — Dados: $B = 105^\circ$ e $c = 35^\circ$; calcular: a, C e b e verificar.

197. — Dados: $b = 47^\circ$ e $c = 95^\circ$; calcular: B, C e a e verificar.

198. — Dados: $B = 27$; e $b = 62^\circ$; calcular: C, c e a e verificar.

199. — Verificar se os lados $a = 60^\circ$, $b = 45^\circ$, $c = 69^\circ\,18'$ pertencem a um triângulo retângulo.

200. — A cidade de Belém e a cidade de Quito estão aproximadamente sobre o Equador e a cidade de São Paulo está aproximadamente no mesmo meridiano ao Sul de Belém. Calcular em milhas náuticas a distância São Paulo-Quito.

Dados:	longitude de Quito:	79° 35′
	longitude de Belém:	48° 57′
	latitude de São Paulo:	23° 27′

A milha náutica é igual a 1′ de arco dos círculos máximos da Terra.

201. — Resolver um triângulo retângulo no qual temos: $B = b$.

UNIDADE XXI

TRIÂNGULO ESFÉRICO OBLIQUÂNGULO

237. — Triângulos polares — ***Dois triângulos esféricos são polares um em relação ao outro*** se os vértices de um deles são os ***polos*** dos lados do outro.

Sejam os triângulos esféricos polares ABC e $A'B'C'$ (fig. 152). Os vértices A' B e C' são os polos dos lados correspondentes a, b e c do outro.

Desde que os lados de um triângulo esférico são arcos de círculos máximos segue-se que cada ponto do lado a dista de 90° do seu polo A'. O mesmo acontece para os outros lados e os seus respectivos polos. Portanto, o arco de grande círculo que liga dois vértices correspondentes, A e A', por exemplo, é menor do que 90°; em outros termos:

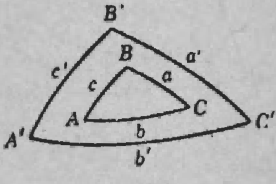

FIG. 152.

dois vértices correspondentes devem estar num mesmo hemisfério, em relação a um deles.

238. — Teorema I. — ***Se um retângulo esférico é polar de outro, recìprocamente este outro é polar do primeiro.***

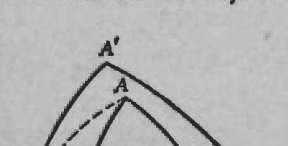

FIG. 153.

Seja o triângulo $A'B'C'$, polar do triângulo ABC (fig. 153).

Se B' é o polo do lado AC, o arco $B'A$ é de 90°.

Se C' é o polo do lado AB, também o arco $C'A$ é de 90°.

Os pontos B' e C' estão pois a 90° do ponto A, e pois que $B'C'$ é um arco de círculo máximo, o ponto A é o polo do lado $B'C'$.

De modo análogo provariamos que os vértices B e C do triângulo ABC são os polos do triângulo A', B', C'.

239. — Teorema II. — ***Em dois triângulos polares, cada ângulo de um deles tem por medida o suplemento do lado que lhe é diretamente oposto no outro triângulo.***

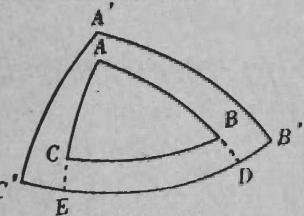

FIG. 154.

Sejam os triângulos polares ABC e $A'B'C'$ (fig. 154).

Devemos ter, por exemplo:

$$A = 180 - B'C'.$$

Com efeito, prolonguemos os lados AB e AC respectivamente até D e E, pontos do lado $B'C'$. A medida do ângulo A é o arco DE, pois DE é o arco de círculo máximo descrito desde A como polo.

Além disso, os arcos $B'E$ e $C'D$ são iguais a 90°. E temos:

$$DE = DC' - EC' = 90° - EC'$$

e

$$B'C' = B'E + EC' = 90° + EC'$$

Somando membro a membro, vem:

$$DE + B'C' = 180° \quad \text{ou} \quad A + B'C' = 180°.$$

Do mesmo modo mostraríamos que os ângulos B e C são os suplementos dos lados $A'C'$ e $A'B'$.

240. — Teorema III. — ***A soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior do que 180° e menor do que 540°.***

Sejam o triângulo ABC e o seu triângulo polar $AB'C'$ cujos lados designaremos por a', b' e c'.

Temos (n.° 239):

$$A+a' = 180°; \quad B+b' = 180°; \quad C+c' = 180°.$$

Por adição, temos:

$$(A+B+C)+(a'+b'+c') = 540°.$$

Mas (226) $\quad a'+b'+c' < 360°.$

Logo: $\quad \boldsymbol{A+B+C > 180°}$

e, pois que: $\quad a'+b'+c > 0,$

resulta que: $\quad \boldsymbol{A+B+C < 540°.}$

241. — Lei dos senos. — ***Em todo triângulo esférico os senos dos lados são proporcionais aos senos dos lados respectivamente opostos.***

Assim, devemos ter:

$$\boxed{\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}} \qquad (97)$$

Esta fórmula é análoga à fórmula (**60**) dos triângulos planos.

Dois casos podem se apresentar conforme o triângulo for acutângulo (fig. 155) ou obtusângulo (fig. 156).

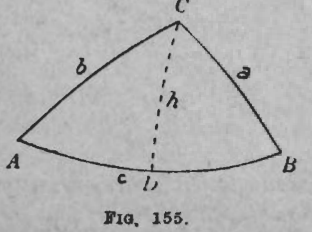

Fig. 155.

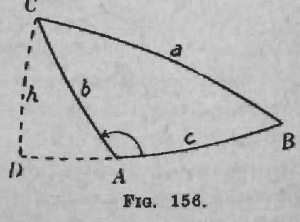

Fig. 156.

Tracemos as alturas CD, que caem sobre a base ou sobre o prolongamento da base.

Na figura 155, temos, aplicando aos triângulos retângulos formados a fórmula (**87**) (n.º 231):

$$h = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, B$$

$$\text{e} \quad h = \text{sen}\, b\, \text{sen}\, A.$$

Logo, temos:

$$\text{sen}\, a\, \text{sen}\, B = \text{sen}\, b\, \text{sen}\, A$$

$$\text{ou} \qquad \frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B} \qquad (1)$$

Traçando nesse mesmo triângulo a altura relativa ao lado b e vértice B, teríamos, de modo análogo:

$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C} \qquad (2)$$

Logo, por causa de (1):

$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B} = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}.$$

No triângulo obtusângulo obteríamos o mesmo resultado, notando que:

$$h = \text{sen}\, a\ \text{sen}\, B$$

$$\text{e} \quad h = \text{sen}\, b\ \text{sen}\, (180^\circ - A) = \text{sen}\, b\ \text{sen}\, A.$$

242. — Lei dos co-senos. — ***Em todo triângulo esférico, o co-seno de um lado qualquer é igual ao producto dos co-senos dos dois outros lados, mais o producto dos senos desses mesmos lados e do co-seno do ângulo oposto ao primeiro lado considerado;*** isto é:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A. \\ \cos b &= \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B. \\ \cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C. \end{aligned}} \quad (98)$$

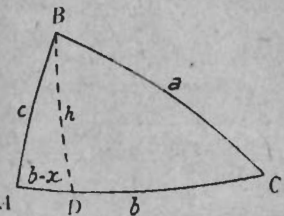

FIG. 157.

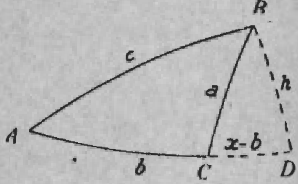

FIG. 158.

Seja o triângulo esférico ABC. Pelo vértice B tracemos a altura, ou círculo máximo perpendicular à base AC. Esta altura determina, sobre a base ou o seu prolongamento, dois segmentos que são, conforme o caso (figs. 157 e 158):

$$x \text{ e } b-x \quad \text{ou,} \quad b \text{ e } x-b.$$

A figura 157 dá, por causa da fórmula (**91**), (n.º 231):

$$\cos c = \cos h \cos x$$

$$\text{e} \quad \cos a = \cos h \cos (b-x)$$

ou, dividindo estas duas igualdades membro a membro:

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos (b-x)}{\cos x};$$

ou, ainda, desenvolvendo $\cos (b-x)$, temos (**25**):

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos b \cos x + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} x}{\cos x} = \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{tg} x.$$

Portanto:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{tg} x \cos c.$$

A fórmula (**88**) dá, no triângulo ABD:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c \cos A.$$

Logo, por substituição obtemos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{tg} c \cos A \cos c$$

ou, (**13**):

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Obteríamos fórmulas análogas se, na figura 157 permutássemos as letras dos vértices e as correspondentes dos lados; ou, ainda, se fizéssemos a construção das alturas relativas aos outros lados e aplicássemos o mesmo raciocínio. Teríamos as 3 fórmulas (**98**).

A figura 158 dá o mesmo resultado. Com efeito, temos:

$$\cos a = \cos h \cos (x-h) = \cos h \cos (h-x)$$

resultado idêntico àquele que já obtivemos na fig. 157.

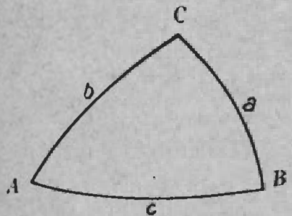

FIG. 159.

243. — Resolução dos triângulos obliquângulos. — A resolução dos triângulos esféricos obliquângulos pode ser referida a 6 casos, em função dos lados e dos ângulos.

1.° Caso: Dados os 3 lados a, b, c.

2.° Caso: Dados os 3 ângulos A, B, C.

3.° Caso: Dados a, b, C, isto é: dois lados e o ângulo compreendido.

4.° Caso: Dados A, B, c, isto é: dois ângulos e o lado compreendido.

5.° Caso: Dados a, b, A, isto é: dois lados e o ângulo oposto a um deles.

6.° Caso: Dados A, B, a, isto é: dois ângulos e o lado oposto a um deles.

Utilizaremos para isso os teoremas que acabamos de demonstrar, além de outras fórmulas que facilitam a resolução e eliminam as soluções não aceitáveis.

244. — 1.° Caso: ***Dados os 3 lados* a, b, c.**

***Calcular os 3 ângulos* A, B, C.**

Da fórmula (98) tiramos:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}. \qquad (1)$$

Acrescentemos 1 a ambos os membros, apliquemos as fórmulas (**43**) e (**52**); teremos:

$$1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a (\cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad (2)$$

Vamos agora subtrair 1 de cada membro de (1) e transformar como precedentemente pelas fórmulas (**44**) e (**52**), teremos:

$$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (a+b-c) \operatorname{sen} (a+c-b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \quad (3)$$

Fazendo-se, em (1) e (2), $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$, e notando-se que (**47**):

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}},$$

obtemos a fórmula:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}}. \tag{4}$$

De modo análogo, obteríamos:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}}. \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}}. \tag{6}$$

Para darmos a essas expressões uma forma mais simples façamos:

$$M=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p}};$$

as fórmulas (4), (5) e (6) vem a ser:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\frac{M}{\operatorname{sen}(p-a)}\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\frac{M}{\operatorname{sen}(p-b)}\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\frac{M}{\operatorname{sen}(p-c)}\end{aligned}} \tag{99}$$

Obtemos assim 3 equações que nos dão A, B e C.

Essas fórmulas teriam duplo sinal ($\pm$) por causa do radical M. No entanto, se considerarmos apenas ângulos inferiores a 180°, as tangentes das metades desses ângulos serão positivas. Por isso conservamos apenas o sinal $+$. Nas aplicações astronômicas, o sinal ($-$) deve também ser, às vezes, considerado.

245. — 2.° Caso. — *Dados os 3 ângulos* A, B, C; *calcular os 3 lados:* a, b, c.

Sejam A', B', C' e a', b', c', os elementos correspondentes do triângulo $A'B'C'$, polar do triângulo ABC (n.° 237).

Façamos também:

$$a' + b' + c' = 2\,p' \qquad (1)$$

e $$(A+B+C) - \pi = 2e \ (\textit{excesso esférico}).$$

ou $$A + B + C = 2e + \pi \qquad (2)$$

Temos, ainda, (n.° 239):

$$A' = \pi - a; \quad \text{donde:} \quad \frac{A'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

A relação (1) pode ser escrita na forma (n.° 240):

$$2p' = a' + b' + c' = 540^\circ - (A + B + C) =$$
$$= 3\pi - (e + \pi) = 2\,(\pi - e).$$

donde: $$p' = \pi - e. \qquad (4)$$

Logo: $$\left.\begin{aligned} p' - a' &= (\pi - e) - (\pi - A) = A - e. \\ p' - b' &= (\pi - e) - (\pi - B) = B - e. \\ p' - c' &= (\pi - e) - (\pi - C) = C - e. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Aplicando ao triângulo polar as fórmulas (99) teríamos para o ângulo A':

$$\operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p'-b')\operatorname{sen}(p'-c')}{\operatorname{sen} p' \operatorname{sen}(p'-a')}}. \qquad (6)$$

Substituindo-se nesta fórmula os elementos do triângulo polar pelos elementos do triângulo dado, de acôrdo com os resultados obtidos em (3), (4) e (5), vem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-e)\operatorname{sen}(C-e)}{\operatorname{sen}(\pi-e)\operatorname{sen}(A-e)}};$$

ou
$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-e)\operatorname{sen}(C-e)}{\operatorname{sen}(\pi-e)\operatorname{sen}(A-e)}}. \qquad (7)$$

Façamos:

$$N=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} e}{\operatorname{sen}(A-e)\operatorname{sen}(B-e)\operatorname{sen}(C-e)}};$$

teremos:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=N\operatorname{sen}(A-e). \qquad (8)$$

Esta equação (8) permite calcular o lado a. Obteríamos fórmulas análogas para os outros lados. Temos, pois, as equações:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=N\operatorname{sen}(A-e)\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2}&=N\operatorname{sen}(B-e)\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}&=N\operatorname{sen}(C-e)\end{aligned}} \qquad \mathbf{(100)}$$

Uma observação análoga à do número precedente pode ser feita a respeito do duplo sinal do radical N.

246. — 3.° Caso. — Dados a, b, C (2 lados e o ângulo compreendido); calcular: A, B, c.

A resolução deste caso e dos seguintes é muito facilitada pelas ***fórmulas de Napier***, ordinàriamente conhecidas sob o nome de "Analogias de Napier". Chegaremos a essas fórmulas deduzindo primeiro outro grupo de fórmulas conhecidas sob o nome de "***Analogias de Delambre***" ou "***Equações de Gauss***".

(Ver, número 249).

247. — Analogias de Delambre. — Pela equação (2), n.º 244, temos:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b+c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c-a)}{2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

ou, fazendo $a+b+c=2p$:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}. \qquad (1)$$

De modo análogo obteríamos:

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}. \qquad (2)$$

Também, pela equação (3), n.º 244, temos:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+c-b)}{2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}.$$

ou: $$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}. \qquad (3)$$

De modo análogo, teríamos:

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}. \qquad (4)$$

Tomemos agora a fórmula (**22**):

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B,$$

ou $$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} = \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}. \qquad (5)$$

Substituindo em (5) os resultados (1), (2), (3) e (4), obtemos:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(p-b)\operatorname{sen}(p-c)\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}+$$

$$+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(p-a)\operatorname{sen}(p-c)\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}^2 c\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}},$$

ou:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-a)+\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}.$$

Notemos que o radical é igual a $\cos\frac{C}{2}$; temos, pois:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-a)+\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\cdot\cos\frac{C}{2},$$

ou $$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}c}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

Mas: $$\operatorname{sen}c=2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2};\quad (36)$$

logo: $$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\frac{C}{2}.\qquad (6)$$

Por um processo análogo calcularíamos $\cos\frac{1}{2}(A+B)$, partindo da fórmula **(23)**; ou ainda, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)$ e $\cos\frac{1}{2}(A+B)$, partindo das fórmulas **(24)** e **(25)**. Eis os resultados:

252. — 6.° Caso. — *Dados* A, B, a; *calcular* C, b, c.

Calcula-se logo o lado b pela "Lei dos senos".

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}.$$

Esta fórmula dá resultados que devem ser interpretados como no 5.° Caso (n.° 241).

Termina-se, depois, como no 5.° Caso.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exemplo I. — ***Dados*** $A = 65°$, $B = 105°$, $C = 74°$; calcular a, b, c.

Este exemplo pertence ao 2.° Caso. Para o uso das fórmulas **100**, calculemos o excesso esférico.

$$E = 2e = (65° + 105° + 74°) - 180° = 64°$$

ou

$$e = 32°.$$

Donde: $A - e = 33°$; $B - e = 73°$; $C - e = 42°$.

Calculemos agora o logaritmo do fator N.

$$N = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} e}{\operatorname{sen}(A-e)\operatorname{sen}(B-e)\operatorname{sen}(C-e)}}.$$

Façamos primeiro um quadro dos logaritmos necessários:

$\log \operatorname{sen} 32° = \bar{1},724\ 2097$

$\log \operatorname{sen} 33° = \bar{1},736\ 1088$

$\log \operatorname{sen} 73° = \bar{1},980\ 5963$

$\log \operatorname{sen} 42° = \bar{1},825\ 5109$

Cálculo de log *N*

$$\begin{array}{lr}
\log \operatorname{sen} 32° & = \bar{1},724\ 2097 \\
\operatorname{colog} \operatorname{sen} 33° & = 0,263\ 8912 \\
\operatorname{colog} \operatorname{sen} 73° & = 0,019\ 4037 \\
\operatorname{colog} \operatorname{sen} 42° & = \underline{0,174\ 4891} \\
2 \log N & = 0,181\ 9937 \\
\log N & = 0,090\ 9968
\end{array}$$

Cálculo de a

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = N \operatorname{sen}(A-e)$$

$$\log N = 0{,}090\ 9968$$
$$\log \operatorname{sen} 33^\circ = \bar{1}{,}736\ 1088$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \bar{1}{,}827\ 1056$$
$$\frac{a}{2} = 33^\circ\, 53'.$$
$$\mathbf{a = 67^\circ\, 46'}$$

Cálculo de b

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = N \operatorname{sen}(B-e).$$

$$\log N = 0{,}090\ 9968$$
$$\log \operatorname{sen} 73^\circ = \bar{1}{,}980\ 5963$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{b}{2} = 0{,}071\ 5931$$
$$\frac{b}{2} = 49^\circ\, 42'$$
$$\mathbf{b = 99^\circ\, 24'}$$

Cálculo de c

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = N \operatorname{sen}(C-e)$$

$$\log N = 0{,}090\ 9968$$
$$\log \operatorname{sen} 42^\circ = \bar{1}{,}825\ 5109$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1}{,}916\ 5077$$
$$\frac{c}{2} = 39^\circ\, 32'$$
$$\mathbf{c = 79^\circ\, 04'}$$

VERIFICAÇÃO. — A "Lei dos senos" é geralmente utilizada para a verificação da resolução completa dos triângulos esféricos. Temos aqui:

$$\frac{\operatorname{sen} 67^\circ\, 46'}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 99^\circ\, 24'}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 79^\circ\, 04'}{\operatorname{sen} 74^\circ}.$$

Os logaritmos dão:

$\bar{1}{,}966\ 4471$	$\bar{1}{,}994\ 1289$	$\bar{1}{,}992\ 0445$
$0{,}042\ 7243$	$0{,}015\ 0562$	$0{,}017\ 1584$
0,009 1714	**0,009 1851**	**0,009 2029**

Como os lados têm sido calculados apenas com aproximação de minuto, esta aproximação, na verificação, é considerada suficiente.

Exemplo II. — ***Dados:*** $C = 46^\circ$; $c = 35^\circ$; $a = 50^\circ$.

Calcular: A, B, b.

Este exemplo pertence ao 5.º Caso. Calculemos primeiro o ângulo A, pela ***Lei dos senos.*** Temos:

$$\text{sen } A = \frac{\text{sen } a \text{ sen } C}{\text{sen } c} = \frac{\text{sen } 50^\circ \text{ sen } 46^\circ}{\text{sen } 35^\circ}.$$

$$\begin{aligned}
\log \text{ sen } 50^\circ &= \bar{1},884\ 2540 \\
\log \text{ sen } 46^\circ &= \bar{1},856\ 9341 \\
\text{colog sen } 35^\circ &= 0,241\ 4087 \\
\hline
\log \text{ sen } A &= \bar{1},982\ 5968 \\
A &= \mathbf{73^\circ 53'} \quad \text{e} \quad \mathbf{106^\circ 07'}.
\end{aligned}$$

Estes dois ângulos suplementares são ambos admissíveis, pois o lado a é maior do que o lado c e estes dois valores de A são maiores do que o ângulo C. Teremos, pois, duas soluções.

Cálculo de B

Uma analogia de Napier análoga à (**101**) daria:

$$\text{cotg} \frac{B}{2} = \frac{\text{tg } ½ (A+C) \cos ½ (a+c)}{\cos ½ (a-c)}.$$

$$\frac{\text{tg } 59^\circ 56' \cos 42^\circ 30'}{\cos 7^\circ 30'} \quad \text{e} \quad \frac{\text{tg } 76^\circ 03' \cos 42^\circ 30'}{\cos 7^\circ 30'}.$$

$$\begin{aligned}
\log \text{ tg } 59^\circ 56' &= 0,237\ 3944 & \log \text{ tg } 76^\circ 03' &= 0,604\ 8462 \\
\log \cos 42^\circ 30' &= \bar{1},867\ 6309 & \log \cos 43^\circ 30' &= \bar{1},867\ 6309 \\
\text{colog } \cos 7^\circ 30' &= 0,003\ 7314 & \text{colog } \cos 7^\circ 30' &= 0,003\ 7314 \\
\hline
\log \text{ cotg} \frac{B}{2} &= 0,108\ 7567 & \log \text{ cotg} \frac{B'}{2} &= 0,476\ 2085 \\
\frac{B}{2} &= 37^\circ 54' & \frac{B'}{2} &= 18^\circ 28' \\
\mathbf{B} &= \mathbf{75^\circ 48'} & \mathbf{B'} &= \mathbf{36^\circ 56'}
\end{aligned}$$

Cálculo de b. — Usaremos a fórmula, deduzida de (**104**):

$$\text{tg} \frac{b}{2} = \frac{\text{tg } ½ (a-c) \text{ sen } ½ (A+C)}{\text{sen } ½ (A-C)}.$$

$$\frac{\text{tg } 7^\circ 30' \text{ sen } 59^\circ 56'}{\text{sen } 13^\circ 56'} \quad \text{e} \quad \frac{\text{tg } 7^\circ 30' \text{ sen } 76^\circ 03'}{\text{sen } 30^\circ 04'}.$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} 7^\circ 30' & = \bar{1},119\ 4291 \\ \log \operatorname{sen} 59^\circ 56' & = \bar{1},937\ 2385 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 13^\circ 56' & = \underline{0,618\ 3566} \\ \log \operatorname{tg} \frac{b}{2} & = \bar{1},675\ 0242 \\ \frac{b}{2} & = 25^\circ 19' \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{= 50^\circ 38'} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} 7^\circ 30' & = \bar{1},119\ 4291 \\ \log \operatorname{sen} 76^\circ 03' & = \bar{1},986\ 9984 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 30^\circ 04' & = \underline{0,300\ 1559} \\ \log \operatorname{tg} \frac{b'}{2} & = \bar{1},406\ 5834 \\ \frac{b'}{2} & = 14^\circ 18' \\ \boldsymbol{b'} & \boldsymbol{= 28^\circ 36'} \end{array}$$

As duas soluções podem ser agrupadas como segue:

1.ª $A = 73^\circ 53'$; $B = 75^\circ 48'$: $b = 50^\circ 38'$

2.ª $A = 106^\circ 07'$; $B = 36^\circ 56'$; $b = 28^\circ 36'$.

VERIFICAÇÃO. — A verificação pode ser feita por uma das Analogias de Delambre; teremos para a 1.ª solução:

$$\operatorname{sen} \frac{A+C}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c) \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} b}.$$

$$\log \operatorname{sen} 59^\circ 56' = \log \cos 7^\circ 30' + \log \cos 37^\circ 54' + \operatorname{colog} \cos 25^\circ 19'$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos 7^\circ 30' & = \bar{1},996\ 2686 \\ \log \cos 37^\circ 54' & = \bar{1},897\ 1233 \\ \operatorname{colog} \cos 25^\circ 19' & = \underline{0,043\ 8517} \end{array}$$

$$\bar{1},937\ 2385 \qquad\qquad \bar{1},937\ 2436$$

Poderiamos também utilizar a "Lei dos senos".

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

202. — Nos dois exercícios seguintes use a "Lei dos senos" para calcular o terceiro lado:

1.º $a = 92^\circ$, $b = 43^\circ$, $C = 73^\circ$; calcular c.

2.º $b = 130^\circ$, $c = 72^\circ$, $A = 85^\circ$; calcular a.

203. — Nos dois exercícios seguintes use a "Lei dos co-senos" para calcular o terceiro lado do triângulo polar; calcule, depois, o terceiro ângulo do triângulo dado.

1.º $A = 105^\circ$, $B = 79^\circ 20'$, $c = 47^\circ$; calcular C.

2.º $A = 87^\circ 25'$, $C = 35^\circ 15'$, $b = 95^\circ$; calcular B.

204. — Nos dois exercícios seguintes calcule os três ângulos pelas fórmulas (**99**).

1.° $a = 27°$, $b = 57°$, $c = 62°$; calcular A, B, C.

2.° $a = 120° 15'$, $b = 75° 04'$, $c = 95°$; calcular A, B, C.

205. — Nos exercícios seguintes calcule os ângulos do triângulo polar e, em seguida, os lados do triângulo dado:

1.° $A = 110°$, $B = 95°$, $C = 72°$; calcular a, b, c.

2.° $A = 105°$, $B = 120°$, $C = 140°$; calcular a, b, c.

No triângulo ABC, dados: $A = 120°$, $B = 72°$, $C = 95° 20'$; calcular a, b, C.

207. — No triângulo ABC, dados: $C = 75° 20'$ $c = 62°$, $a = 47°$; calcular A, B, b.

208. — Em cada um dos casos seguintes, dizer se haverá duas soluções, uma única solução ou nenhuma solução e por quê?

(1) $B = 55°$, $A = 130°$, $a = 25°$

(2) $B = 45°$, $C = 67°$, $a = 130°$

(3) $B = 25°$, $A = 62°$, $a = 130°$

(4) $A = 42°$, $a = 35°$, $b = 56°$.

(5) $c = 150°$, $a = 122°$, $C = 75°$.

(6) $B = 85°$, $b = 72°$, $a = 150°$.

209. — Quais são as condições a que deve satisfazer um triângulo esférico para ser idêntico com seu triângulo polar?

210. — Num triângulo esférico ABC, temos a relação:

$$\operatorname{sen} b \cos A = \operatorname{sen} a \cos B.$$

Provar que esse triângulo é isósceles.

211. — Partindo da ***"Lei dos co-senos"** para os **lados*** (n.° 242), demonstrar a seguinte ***"Lei dos co-senos** para os **ângulos**:***

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c.$$

UNIDADE XXII

ESFERA TERRESTRE E TRIÂNGULO TERRESTRE

253. — Esfera terrestre. — Embora a Terra apresente uma forma própria, ou ***geoide***, nas aplicações comuns não há erro notável em considerá-la perfeitamente esférica. Os ***pólos geográficos***, Norte e Sul, são os polos principais e os círculos perpendiculares ao ***eixo*** NS são

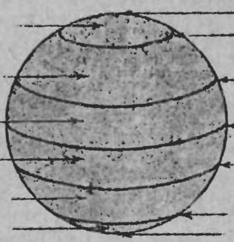

FIG. 160.

chamados ***paralelos terrestres.*** O ***círculo máximo*** do eixo NS é também o ***paralelo máximo*** e é denominado ***equador.*** O equador divide a esfera terrestre em dois hemisférios chamados respectivamente ***Norte*** e ***Sul,*** de acordo com o polo que contêm.

Os círculos máximos que passam pelos polos são chamados ***meridianos.*** Todos os meridianos são perpendiculares aos círculos paralelos e, em particular, ao equador.

254. — Coordenadas geográficas. — Por um ponto qualquer da esfera terrestre podemos sempre traçar um paralelo e um meridiano. A posição desse paralelo e desse meridiano em relação a um ponto fixo da esfera terrestre nos dará a posição do ponto dado sobre a esfera terrestre.

O meridiano que passa por Greenwich, perto de Londres, é chamado ***primeiro meridiano*** ou ***meridiano de Greenwich.*** É o meridiano ***origem*** para uma das coordenadas geográficas: a ***longitude.***

O primeiro meridiano corta o equador num ponto de longitude 0°. Todos os pontos desse meridiano têm longitude 0. A longitude relativa aos outros meridianos conta-se de 0° até 180° para Leste ou para Oeste do meridiano de Greenwich.

Latitude de um lugar é o arco do meridiano, medido em graus, desde esse ponto até o equador. Os polos têm 90° de latitude e os ponto do equador 0°.

Longitude e ***latitude*** constituem as duas ***coordenadas geográficas*** de um ponto da esfera terrestre.

Assim diremos (fig. 161).

$A \begin{cases} \text{latitude } 25^\circ \text{ N.} \\ \text{longitude } 42^\circ \text{ W.} \end{cases} \qquad B \begin{cases} \text{latitude } 45^\circ \text{ S} \\ \text{longitude } 35^\circ \text{ E.} \end{cases}$

Os 2 círculos paralelos traçados a 23° 27′ de latitude Norte ou Sul, são respectivamente o ***Trópico do Câncer*** e o ***Trópico do Capricórnio.*** Limitam a ***zona equatorial.***

Os círculos paralelos traçados a 66° 33′ de latitude Norte e Sul são respectivamente o ***círculo polar Árctico*** e o ***círculo polar Antártico.*** Limitam as ***zonas polares.***

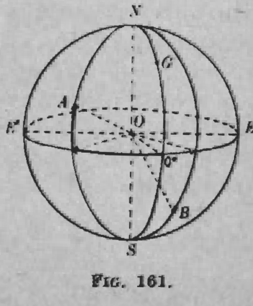

FIG. 161.

255. — Triângulo terrestre. — Sejam dois pontos A e B da Terra dos quais conhecemos as latitudes e as longitudes respectivas. Tracemos os círculos meridianos desses pontos. Pelos pontos A e B tracemos também um círculo máximo. O triângulo NAB, formado por arcos de círculos máximos é um triângulo esférico. O arco AB é a ***distância geográfica*** entre os pontos A e B. É a mais curta distância entre esses pontos sobre a esfera terrestre (n.º 221).

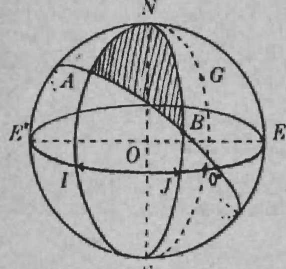

FIG. 162.

A determinação das distâncias geográficas constitui uma das aplicações interessantes da trigonometria esférica.

No triângulo NAB, os arcos AN e BN, são os complementos da latitude dos pontos A e B respectivamente. O ângulo esférico em N, é medido sobre o equador em JI e é dado imediatamente em função do longitude respectiva dos pontos A e B.

A resolução do triângulo esférico para a determinação das distâncias pertence, pois, ao 3.º Caso: dados dois lados e o ângulo compreendido.

Os ângulos em A e em B indicam as ***orientações*** respectivas dos dois pontos, um em relação ao outro. Também são elementos calculáveis do triângulo NAB.

256. — Milha marítima. — A ***milha marítima*** internacional é considerada equivalente a **1 852 m** ou, aproximadamente, a **1′** ***de arco de grande círculo da esfera terrestre.*** O raio médio dessa esfera seria de 6 367 metros.

Esta unidade é muito interessante na prática da determinação das distâncias. Com efeito, para se converter a milhas uma distância medida em graus de círculo máximo, basta reduzir esse arco a minutos. Para se obter a distância em metros bastaria, depois, multiplicar esse número que exprime milhas por 1 852.

Assim, para uma distância avaliada em $20^\circ 18'$ teremos:

$$(20 \times 60) + 18 = 1\,218 \text{ milhas marítimas}$$

ou $\quad 1\,218 \times 1\,852 = 2\,255\,736$ m $\quad$ ou $\quad 2\,255{,}736$ km.

257. — Aplicação. — Calcular, em milhas marítimas, a distância entre o Rio-de-Janeiro e Nova-York.

$$\text{Rio} \begin{cases} \text{lat. } 22^\circ 54' \text{ S} \\ \text{Long. } 43^\circ 10' \text{ W} \end{cases} \qquad \text{N.-Y.} \begin{cases} \text{Lat. } 40^\circ 49' \text{ N} \\ \text{Long. } 73^\circ 58' \text{ W} \end{cases}$$

Seja A, Nova-York e B, Rio de Janeiro.

De acordo com os dados, o triângulo esférico NAB, figura 162, teria as dimensões seguintes:

$$NB = 90^\circ + 22^\circ 54' = 112^\circ 54'$$
$$NA = 90^\circ - 40^\circ 49' = 49^\circ 11'$$

As duas longitudes sendo W, o arco IJ que mede o ângulo N, é igual à diferença das longitudes e temos:

$$N = 73^\circ 58' - 43^\circ 10' = 30^\circ 48'.$$

Poderíamos aplicar a este problema o processo indicado para a resolução completa do 3.º Caso. Porém, não havendo necessidade do cálculo dos outros ângulos, aplicaremos a ***"Lei dos co-senos"***. Eis como se procede, na prática:

Uma das fórmulas (**98**) nos dá:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Teremos aqui:

$$\cos(AB) = \cos 112^\circ 54' \cos 49^\circ 11' +$$
$$+ \operatorname{sen} 112^\circ 54' \operatorname{sen} 49^\circ 11' \cos 30^\circ 48'$$

Calculemos agora cada um dos produtos separadamente, por meio dos logaritmos.

$$\log \cos 112^\circ 54' = \bar{1},590\,0880 \qquad \log \text{sen}\ 112^\circ 54' = \bar{1},964\,3470$$

$$\log \cos 49^\circ 11' = \bar{1},815\,3391 \qquad \log \text{sen}\ 49^\circ 11' = \bar{1},878\,9840$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \log \cos 30^\circ 48' = \bar{1},709\,3063$$

$$\bar{1},405\,4271 \qquad\qquad \bar{1},552\,6373$$

Nas tábuas dos números procuramos agora a parcela correspondente a cada um desses dois logaritmos. Notemos, porém, que a primeira das parcelas é negativa, pois no primeiro produto entra o co-seno de um arco do 2.º quadrante.

$$-0,2543 \qquad\qquad 0,3570$$

$$\cos(AB) = 0,3570 - 0,2543 = 0,1027$$

$$\log \cos(AB) = \bar{1},011\,5704.$$

$$AB = 84^\circ 06' \quad \text{ou} \quad 5046'.$$

Logo, a distância Rio-Nova-York é de ***5 046 milhas marítmas***, ou

$$5\,046 \times 1\,852 = \mathbf{9\,245\ km.}, \text{ aproximadamente.}$$

258. — Posição geográfica de algumas cidades do mundo. — Em vista de aplicações de determinação de distâncias damos a seguir a lista da posição geográfica de algumas cidades do mundo:

CIDADE	LATITUDE	LONGITUDE
Rio de Janeiro	22° 54′ S.	43° 13′ W.
Nova-York	40° 49′ N.	73° 58′ W.
Londres	51° 31′ N.	0° 06′ W.
São Francisco (Califórnia)	37° 32′ N.	122° 13′ W.

CIDADE	LATITUDE	LONGITUDE
Paris	48° 50′ N.	2° 20′ E.
Sydney	33° 52′ S.	151° 12′ E.
Moscow	55° 43′ N.	37° 34′ E.
Manaus	3° 08′ S.	60° 00′ W.
Natal	5° 47′ S.	35° 11′ W.
Belo Horizonte	19° 50′ S.	43° 57′ W.
Santos	23° 58′ S.	48° 52′ W.

Se a cidade B, por exemplo, (figura 162), estiver no hemisfério Norte, o arco BN é igual ao complemento da latitude de B; se B estiver, pelo contrário, no hemisfério Sul, o arco BN será igual a 90°, mais a latitude.

Se as longitudes de A e de B forem ambas Leste ou ambas Oeste, o arco IJ, que mede o ângulo em N é igual à diferença das longitudes. Se, pelo contrário, estiverem uma para Leste e a outra para Oeste, o arco IJ será igual à soma das longitudes. Se esta soma for maior do que 180°, tira-se a soma de 360° e considera-se o resto da subtração.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

212. — Calcular em milhas marítimas as distâncias entre as cidades seguintes:

(*a*) Entre Rio de Janeiro e Natal.
(*b*) Entre Paris e Nova-York.
(*c*) Entre Londres e Sydney.
(*d*) Entre Manaus e Santos.
(*e*) Entre Moscow e São Francisco (Califórnia).

213. — Qual é a orientação geográfica da cidade de Nova-York em relação a um observador do Rio de Janeiro.

214. — Que direção deve tomar em São Paulo um avião que se dirige para Natal pelo caminho mais curto. Quanto tempo leva o avião para fazer o percurso se tem uma velocidade própria de 250 milhas por hora e se o vento sopra na direção e sentido da rota seguida com a velocidade de 20 milhas por hora.

UNIDADE XXIII

A ESFERA CELESTE E O TRIÂNGULO ASTRONÔMICO

259. — ***Esfera celeste.*** — O céu se apresenta a um observador terrestre como uma abóbada semi-esférica da qual a Terra ocupa o centro. À noite, a esfera celeste se apresenta constelada de astros (estrelas e planetas) que se movem, em ***movimento aparente*** de Leste para Oeste. O raio visual que vai do observador a um desses astros intercepta a esfera celeste num ponto que se denomina "posição aparente" do astro. As enormes proporções da esfera celeste, de raio ilimitado, permitem que se faça abstração do raio da Terra quando se trata da observação das estrelas. O observador é, assim, suposto ocupar o centro da Terra e os ângulos medidos não sofrem, neste caso, nenhuma alteração. No caso de observações de planetas, do Sol e da Lua, as observações feitas do centro da Terra seriam levemente diferentes; porém, nos cálculos aproximados, não se toma em conta essa diferença (***paralaxe***) e procede-se como se o raio da Terra fosse nulo.

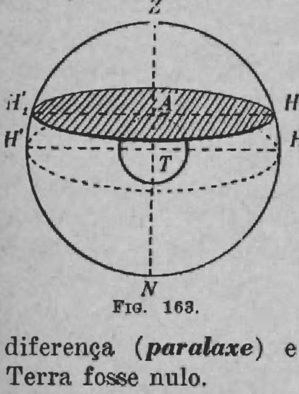

FIG. 163.

Seja A, figura 136, um observador da Terra T, e H_1 um plano tangente à Terra nesse ponto. A intersecção desse plano com a abóbada celeste forma a ***linha do hori-***

zonte que circunda o observador. O plano H_1 é o ***horizonte físico*** do observador. Varia para cada posição na superfície da Terra. No mar ou numa planície, a linha do horizonte é tomada como linha de referência. Porém, se o observador estiver muito acima do nível do solo, deverá tomar em conta a ***depressão do horizonte físico*** (n.º 177).

O plano pararelo a H_1, HH', que passa pelo centro da Terra, é o ***horizonte astronômico*** do observador. Nas aplicações elementares, toma-se geralmente $H_1H'_1$ em lugar de HH'

A perpendicular ao plano do horizonte, traçada pelo observador A, é a ***vertical*** do observador; intercepta a esfera celeste em dois pontos diâmetralmente opostos: o ***Zenite,*** acima do horizonte e o ***Nadir,*** abaixo do horizonte.

260. — Coordenadas horizontais. — O círculo do horizonte tem como polos os pontos Z e N. Os círculos máximos que contém a vertical ZN são perpendiculares ao plano do horizonte. Por um ponto qualquer A da esfera celeste podemos sempre fazer passar um ***círculo vertical*** que cortará o horizonte num determinado ponto M.

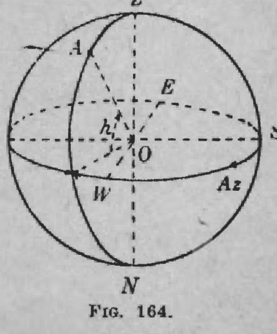

FIG. 164.

O arco MA, é a ***altura do ponto A acima do horizonte.***

O arco SM, medido sobre o horizonte, no sentido S-W-N-E-S (retrógrado), a partir do ponto Sul do horizonte, é o ***azimute*** do ponto A.

Azimute e ***altura*** constituem as ***coordenadas horizontais*** do ponto A.

261. — Coordenadas equatoriais. — Se prolongarmos o eixo da Terra, obteremos, por intersecção com a esfera celeste, dois pontos, P e P', denominados ***polos celestes.*** O círculo máximo correspondente a esses polos é o ***equador celeste,*** obtido também por intersecção do plano do equador terrestre com a esfera celeste.

Os círculos máximos que passam pelos polos P e P' são ***meridianos celestes*** ou ***círculos horários.***

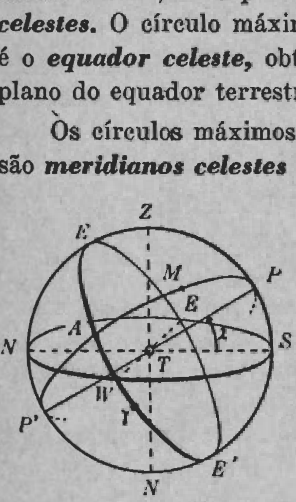

FIG. 165.

A posição de um ponto M, sobre a esfera celeste, pode ser referida ao equador celeste e a um círculo horário fundamental. Obtemos assim uma réplica das coordenadas geográficas, ***latitude*** e ***longitude,*** aqui denominadas, ***declinação*** e ***ascenção reta.*** Na figura 165, a declinação do ponto M é a medida do arco AM.

Para os observadores do hemisfério Sul da Terra, o ponto P é o polo Sul celeste, situado no círculo vertical que passa pelo ponto Sul do horizonte.

O arco SP, é a ***altura do polo acima do horizonte.*** Demonstra-se que ***a latitude de um lugar da Terra é igual à altura do polo acima do horizonte desse lugar.***

262. — O triângulo astronômico. — Seja M, um ponto da esfera celeste. Tracemos, por esse ponto, um

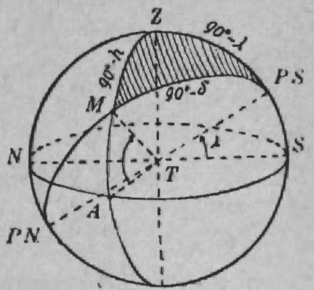

FIG. 166.

círculo horário e ***um círculo vertical***. O triângulo MZP que tem como vértices o ponto dado, o zenite e o polo celeste acima do horizonte é o triângulo astronômico fundamental do ponto M.

O lado MZ é igual ao complemento da altura do ponto M acima do horizonte; é também chamado ***distância zenital***.

O arco MP é o complemento da declinação do astro M; é a ***distância polar*** do astro.

O arco ZP é o complemento da altura do polo acima do horizonte ou complemento da latitude do observador.

O círculo horário PMP' acompanha o astro no seu movimento diurno aparente de tal modo que os ângulos desse triângulo variam a cada instante.

O ângulo MZP, igual ao arco SA, é o ***ângulo azimutal*** igual ao ***azimute*** do astro.

O ângulo ZPM é o ***ângulo horário***; varia conforme a hora do dia e serve para a determinação da hora.

O ângulo ZMP é chamado ***ângulo paraláctico***.

Sejam: h a altura de M acima do horizonte;

δ a declinação de M;

λ a latitude do lugar.

Teremos:

lado $MZ = 90° - h$; é a co-altura;
lado $ZP = 90° - \lambda$; é a co-latitude;
lado $MP = 90° - \delta$; é a co-declinação.

263. — Resolução do triângulo astronômico. — Conhecidos três elementos do triângulo astronômico, os outros 3 elementos podem ser calculados pela resolução do triângulo esférico MZP.

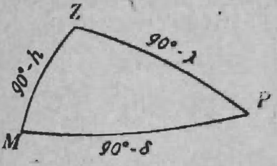

Fig. 167.

Geralmente a altura h é medida diretamente por meio do ***teodolito***, em terra, ou por meio do ***sextante***, no mar.

A declinação do astro, constante para qualquer ponto da Terra, sofre apenas pequenas variações anuais e é dada por meio de tábuas publicadas em anuários: ***Anuário do Observatório Nacional do Rio de Janeiro, Connaissance des temps, The Nautical Almanac***, etc.

A latitude do lugar é, às vezes, um elemento conhecido, outras vezes um elemento procurado.

O ângulo horário é conhecido por meio da hora sideral e da ascenção reta; é também, às vezes, um elemento procurado e constitui então, no caso de ser M o Sol, o problema da determinação da hora.

264. — Determinação da hora local. — Conhecida a latitude de um lugar, a altura do sol acima do horizonte num momento dado e a declinação do Sol nesse dia do ano, o triângulo MZP permite calcular o ***ângulo horário*** ZPM.

Quando o sol passa pelo plano vertical superior Norte-Sul de um lugar, dizemos que é ***meio-dia solar verdadeiro*** nesse lugar. Neste momento, o ângulo horário do Sol é 0°. Antes da sua passagem pelo meridiano, o seu ângulo horário está do lado Leste do meridiano; é a manhã. Depois da sua passagem meridiana está do lado Oeste; é a *tarde*.

O Sol percorre um círculo da esfera celeste em 24 horas de tempo médio. Numa hora percorre, pois, um arco de 15°.

Portanto, se o ângulo horário do Sol, for, num dado momento de 60° para Oeste, serão nesse lugar $\frac{60}{15} = 4$ horas da tarde de ***tempo local verdadeiro***.

A determinação do ***tempo legal*** requer, depois, o conhecimento da posição do lugar da observação em relação ao fuso horário adoptado por lei.

Para termos a hora solar, calcularemos, pois, em graus, o ângulo horário ZPM que dividiremos por 15 para reduzi-lo a horas, que serão contadas antes ou depois do meio dia, conforme o ângulo horário for oriental ou ocidental.

265. — Determinação da latitude. — Se conhecermos a altura do Sol acima do horizonte, o ângulo horário e a declinação do Sol, poderemos calcular a latitude do ponto de observação.

A observação do Sol por meio do teodolito ou sextante fornece a ***altura***.

A declinação é dada, para cada dia do ano, pelo ***"Anuário do Observatório Nacional do Rio de Janeiro"***.

O ângulo horário é conhecido por meio da ***hora*** local.

Eis alguns exemplos para mostrar como se pode proceder nesses cálculos. Não tomaremos em conta as correções usuais nas observações e consideraremos o problema apenas do ponto de vista trigonométrico.

266. — Exercícios resolvidos. — *Problema I.* — ***Que horas são em São Paulo a 1.º de Junho quando o Sol está a 30° acima do horizonte?***

Dados: declinação do Sol, $\delta = 21° 53'$ Norte.
altura do Sol, $h = 30°$.
latitude de São Paulo, $\lambda = 23° 32'$ Sul.

Temos aqui: $MP = 90° + 21° 53' = 111° 53'$

porque a declinação é Norte e o polo Sul está acima do horizonte de São Paulo.

$$PZ = 90° - 23° 32' = 66° 28'$$
$$MZ = 90° - 30° = 60°.$$

Temos, depois, pela fórmula (6) do número 245:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}}.$$

No caso presente temos:

$$\tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \text{ do ângulo horário } ZPM.$$

$$p = \frac{111°53' + 66°28' + 60°}{2} = 119° 10'$$

$$(p-a) = 119° 10' - 60° = 59° 10'.$$

$$(p-b) = 119° 10' - 111° 53' = 7° 17'$$

$$(p-c) = 119° 10' - 66° 28' = 52° 42'$$

$$\log \text{sen} \quad 7^\circ 17' = \bar{1},103\ 0373$$
$$\log \text{sen} \quad 52^\circ 42' = \bar{1},900\ 6257$$
$$\text{colog sen} \quad 119^\circ 10' = 0,058\ 8834$$
$$\text{colog sen} \quad 59^\circ 10' = 0,066\ 1778$$

$$2 \log \text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \bar{1},128\ 7242$$
$$\log \text{tg}\ \tfrac{1}{2} A = \bar{1},564\ 3621$$
$$\tfrac{1}{2} A = 20^\circ 8'$$

$$A \text{ ou } ZPM = 40^\circ 16' \text{ ou } 40,3 \text{ aproxim.}$$

Reduzindo a horas: $\frac{40,3}{15} = \mathbf{2\ h.\ 41\ min.}$

O sol estará, pois a 30º acima do horizonte, 2h 41 min antes e depois do meio dia ou a:

9 h. 19 min. e **14 h. 41 min.**

Problema II. — ***O Sol foi observado, em certo lugar da Terra às 8 h. 20 min. do tempo local. O Sol estava nesse momento a 15° acima do horizonte. A declinação do Sol, nesse dia, dada pelo*** "Anuário", ***era de —20º ou 20º Sul. Qual é a latitude desse lugar?***

O triângulo MZP, fig. 167, dá, aqui:

$$\text{ângulo } P = 12 - 8\frac{1}{3} = 3\frac{2}{3} \text{ h}$$

$$\text{ou} \quad 3\frac{2}{3} \times 15^\circ = 55^\circ.$$

$$\text{ang. } P = A = 12 - 8\frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}\text{h} = 3\frac{2}{3} \times 15^\circ = 55^\circ.$$

$$\text{lado } MZ = a = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

$$\text{lado } MP = b = 90^\circ - (-20^\circ) = 110^\circ.$$

Pela "Lei dos senos" obtemos:

$$\text{ângulo } Z = B = 56^\circ\,18'.$$

Logo: $\lambda = 90^\circ - 56^\circ\,18' = \mathbf{33^\circ\,42'\,N}$.

Problema III. — ***Qual é a hora solar do pôr do Sol no dia do solstício do verão, em Paris? Latitude de Paris $\lambda = 48^\circ\,50'\,N$. Declinação do Sol a 21 de Junho $\delta = 23^\circ\,27'\,N$.***

Temos, (fig. 167):

$$MZ = a = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ.$$
$$PZ = b = 90^\circ - 48^\circ\,50' = 41^\circ\,10'.$$
$$MP = c = 90^\circ - 23^\circ\,27' = 66^\circ\,33'.$$

Calcular o ângulo $P = A$.

Poderíamos calcular A por meio das fórmulas 99, n.º 244. Notemos, porém, que o ***triângulo polar*** correspondente ao triângulo dado é o triângulo retângulo $A'\,B'\,C'$, em que (n.º 239):

$$A' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$
$$B' = 180^\circ - 41^\circ\,10' = 138^\circ\,50'.$$
$$C' = 180^\circ - 66^\circ\,33' = 113^\circ\,27'.$$

A fórmula (**96**), n.º 231, dá:

$$\cos a' = \operatorname{cotg} C' . \operatorname{cotg} B'.$$

Donde: $a' = 60^\circ\,16'$

e $A = 180 - 60^\circ\,16' = 199^\circ\,44'$

ou $A = 11^\circ\,1$ ou $\dfrac{111{,}7}{15} = 7\text{ h. } 59\text{ min.}$

A hora do pôr do Sol, é, pois 7 h 59 min. depois do meio dia, ou **19 h. 59 min.** hora local.

Problema IV. — ***No problema anterior calcular o azimute do Sol no momento do ocaso ou "amplitude vespertina" do sol poente.***

No triângulo MZP, já considerado no problema anterior, calculemos o ***ângulo azimutal*** MZP. É o ângulo oposto ao lado $c = 66° 33'$ ou o lado c', correspondente ao ângulo C' do triângulo polar.

A fórmula (**90**) do n.º 231 dá:

$$\cos c' = \frac{\cos C'}{\operatorname{sen} B'}$$

ou $$\cos c' = \frac{\cos 113° 27'}{\operatorname{sen} 138° 50'} = \frac{-\cos 66° 33'}{\operatorname{sen} 41° 10'}$$

$$180 - c' = 52° 48'$$
$$c' = 127° 12'$$

Logo: $$C = 180 - 127° 12' = 52° 48'.$$

O Sol deita-se, pois, a N 52° 48′ W ou a **127° 12′** do ponto Sul.

O azimute do Sol poente é, pois, **127° 12′** (n.º 25).

No momento do solstício do verão, está amplitude é ***máxima*** e corresponde ao maior ***semi-arco diurno*** percorrido pelo Sol.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

212. — Em Santos, latitude 23° 58′S, o sol foi observado à tarde quando tinha um ângulo de elevação de 35°. A declinação nesse dia era de 18° 25′ N. Calcular a hora local no momento da observação.

213. — O sol foi observado de certo ponto da terra, no hemisfério Sul, às 2 horas da tarde e tinha nesse instante um ângulo de elevação de 42°. Calcular a latitude desse lugar se a declinação do sol era, nesse dia, de 15° 25′.

214. — Calcular a hora local do pôr do sol em Washington, latitude 38° 55′ N, a 21 de Março. Declinação do sol, nesse dia, 0°.

215. — Quantas horas decorrem entre o nascer e o pôr do sol em Moscow, no dia do solstício do verão. Latitude: 55° 43′ N. Declinação do sol: 23° 27′ N.

216. — Calcular quantas horas fica o sol acima do horizonte no Rio de Janeiro, no dia do solstício do inverno.

Latitude do Rio: —22° 53′; declinação a 21 de Junho: —23° 27′.

217. — Em que ponto do horizonte se levanta o sol em São Paulo no dia 1.° de Maio.

Latitude de São Paulo: —23° 32′. Declinação do sol: 14° 44′ N.

UNIDADE XXIV

ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

§ I. — Limite e verdadeiro valor de certas expressões trigonométricas.

267. — Teorema. — ***Um arco do primeiro quadrante é maior do que o seno e menor do que a tangente desse mesmo arco.***

Seja o arco $AM = a$; tracemos a corda MM' perpendicular a OA e as tangentes MT e $M'T$; temos:

$$MT = M'T = \text{tg}\, a,$$
$$MM' = 2MP = 2 \,\text{sen}\, a.$$

Mas (***Geom., c. sup.***, n.º 40), temos:

$$MM' < \text{arco } MAM' < MT + M'T,$$

ou

$$2 \,\text{sen}\, a < 2a < 2 \,\text{tg}\, a;$$

donde:

$$\text{sen}\, a < a < \text{tg}\, a. \qquad (1)$$

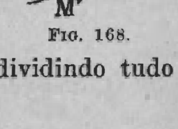

FIG. 168.

Consequência. — ***Os arcos pequenos diferem pouco do seno.***

Com efeito, nas desigualdades (1), dividindo tudo por sen a, vem:

$$1 < \frac{a}{\text{sen}\, a} < \frac{1}{\cos a}. \qquad (2)$$

Ora, quando o arco a tende para 0, o co-seno tende para 1; para $a=0$, a razão $\frac{1}{\cos a}$ tem o limite 1; como $\frac{a}{\text{sen}\, a}$ fica compreendido entre 1 e uma expressão cujo limite é 1, tem também o limite 1.

Logo, ***um arco pequeno difere pouco do seno;*** e pode-se com erro insignificante, tomar o valor do arco para o seno recìprocamente.

Eis, no círculo de raio 1, os valores dos arcos em radianos e dos senos, para os 6 primeiros graus:

Ângulos	Arcos	Senos	Erro
1°	0,017 45	0,017 45	0,000 00
2°	0,034 91	0,034 90	0,000 01
3°	0,052 36	0,052 34	0,000 02
4°	0,069 81	0,069 76	0,000 05
5°	0,087 27	0,087 16	0,000 11
6°	0,104 72	0,104 53	0,000 19

Logo, na prática pode-se tomar $\operatorname{sen} x = x$ até 5° com erro insignificante.

268. — Teorema. — ***Para a = 0, o limite de*** $\dfrac{a}{\operatorname{sen} a}$ ***é 1.***

É o que resulta das desigualdades (1) para $a = 0$; o 1.° membro é 1; o 3.° membro tende para 1 quando $a \to 0$; logo, o 2.° membro, compreendido entre 1 e uma expressão de limite 1, tem o limite 1. Logo,

$$\lim_{a = o} \frac{a}{\operatorname{sen} a} = 1.$$

Consequências. — **1.°** O limite da razão inversa $\dfrac{a}{\operatorname{sen} a}$ para $a = 0$, é também 1, mas tende para 1 por valores superiores a 1, enquanto a razão direta tende para 1 por valores inferiores ao limite.

2.° Nas aplicações deste limite, é preciso transformar as expressões de modo a obter arcos iguais no numerador e no denominador.

Por exemplo, calcular o limite para $a=0$, *de* $\dfrac{\text{sen } ab}{a}$.

O numerador tem o arco ab e o denominador o arco a; temos:

$$\lim.\frac{\text{sen } ab}{a} = \lim.\frac{b \text{ sen } ab}{ab} = b \times \lim.\frac{\text{sen } ab}{ab} = b \times 1 = b.$$

3.° *Quando um arco tende para 0, a razão da corda para o arco tende para 1.*

Na fig. 168, temos:

$$\text{arco } MM' = 2a; \text{ corda } MM' = 2 \text{ sen } a$$

e

$$\frac{\text{corda } MM'}{\text{arco } MM'} = \frac{2 \text{ sen } a}{2a} = \frac{\text{sen } a}{a}.$$

Como essa igualdade se verifica sempre, seja qual fôr a, é ainda verificada quando a tende para 0 e também para o limite $a = 0$ e temos:

$$\lim.\frac{\text{corda } MM'}{\text{arco } MM'} = \lim.\frac{\text{sen } a}{a} = 1.$$

4.° *Para* a $= 0$, *o limite de* $\dfrac{\text{tg } a}{a}$ *é 1.*

Com efeito, a identidade:

$$\frac{\text{tg } a}{a} = \frac{\text{sen } a}{a} \times \frac{1}{\cos a},$$

verificada para qualquer valor de a, é ainda verificada no limite, para $a = 0$. Ora, a substituição $a = 0$ dá:

$$\lim.\frac{\text{tg } a}{a} = \lim.\frac{\text{sen } a}{a} \times \frac{1}{\cos a} = 1 \times 1 = 1.$$

5.° *Para* a $= 0$, *o limite de* $\dfrac{a}{\text{tg } a}$ *é também 1.*

Porque $\dfrac{a}{\text{tg } a}$ é o recíproco de $\dfrac{\text{tg } a}{a}$.

269. — Verdadeiro valor de uma função trigonométrica que se apresenta sob uma forma indeterminada. — As principais formas indeterminadas são:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty, \quad \infty - \infty.$$

DEFINIÇÃO. — ***Para* x = a, *se uma função toma uma forma indeterminada, o verdadeiro valor dessa função é o limite para o qual ela tende quando* x *tende para* a.**

Tirar ou fazer desaparecer a indeterminação é achar esse limite.

Eis os 3 processos mais seguidos:

1.° Se uma fração, $x = a$, toma a forma $\frac{0}{0}$, é que o numerador e o denominador encerram cada um o factor $x-a$; suprime-se esse factor comum ao numerador e ao denominador e vem uma nova fração, sempre igual à 1.ª, mesmo para o limite $x = a$; geralmente essa nova fração, para $x = a$, toma um valor bem determinado, que é o limite da fração proposta, $x = a$.

2.° Procura-sé pôr em evidência razões da forma

$$\frac{\text{sen}\,(x-a)}{x-a}, \quad \frac{\text{tg}\,(x-a)}{x-a}$$

ou seus inversos, que tenham o limite conhecido, 1, para $x = a$.

3.° A álgebra fornece um processo simples, devido à ***L'Hôpital***, para se tirar a indeterminação:

Se uma fração da forma $\frac{f(x)}{Fx}$ toma no limite uma das formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, substituem-se $f(x)$ e $F(x)$ pelas suas derivadas $f'(x)$ e $F'(x)$ e calcula-se novamente o limite. Demonstra-se que:

$$\lim.\frac{f(x)}{F(x)} = \lim.\frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim.\frac{f''(x)}{F''(x)} = \ldots$$

Esta regra também se aplica às outras formas da indeterminação. Bastará, para isso, transformar a expressão dada de modo a escrevê-la na forma de fração.

270. — Derivadas das funções circulares. — Numerosos são os problemas cuja solução requer a aplicação das ***derivadas*** das funções trigonométricas: a regra de L'Hôpital, o estudo das variações das funções, etc.

Damos aqui o quadro das funções derivadas. Para um estudo mais completo do assunto o aluno pode recorrer à ***Álgebra c/sup. F. T. D.***

$$\text{(I)} \quad \frac{d}{dx}(\text{sen } v) = \cos v.\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{(II)} \quad \frac{d}{dx}(\cos v) = -\text{sen } v.\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{(III)} \quad \frac{d}{dx}(\text{tg } v) = \sec^2 v.\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{d}{dx}(\text{cotg } v) = -\text{cosec}^2 v.\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{(V)} \quad \frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v.\text{tg } v.\frac{dv}{dx}.$$

$$\text{(VI)} \quad \frac{d}{dx}(\text{cosec } v) = -\text{cosec } v.\text{cotg } v.\frac{dv}{dx}.$$

271. — Exercícios resolvidos. — I. — ***Calcular o valor numérico da expressão:***

$$y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 3x} \qquad (1)$$

para $x = 0$.

A substituição de x por 0, em (1), dá $\frac{0}{0}$, forma indeterminada.

(a) Transformemos a forma (1) por meio das fórmulas (**28**) e (**31**); obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x (3 - 4 \operatorname{sen}^2 x)}{2 \operatorname{sen} x \cos x}.$$

Para todo valor de x diferente de 0, podemos simplificar esta última expressão que vem a ser:

$$\frac{3 - 4 \operatorname{sen}^2 x}{2 \cos x}. \qquad (2)$$

As expressões (1) e (2) são idênticas para todo valor de x diferente de zero.

Ora, para $x = 0$, a expressão (2) toma o valor numérico $\frac{3}{2}$.

Portanto, quando x tende para zero como limite, a expressão (1) aproxima-se cada vez mais do valor numérico $\frac{3}{2}$. É o que se exprime pela anotação:

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x=0} \frac{3 - 4 \operatorname{sen}^2 x}{2 \cos x} = \frac{3}{2}.$$

(*b*) A regra de L'Hôpital, daria logo:

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x=0} \frac{3 \cos x}{2 \cos x} = \frac{3}{2}.$$

II. — ***Calcular o valor numérico da expressão***

$$\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} \tag{1}$$

para $x = 0$.

(*a*) A substituição direta de x por 0 dá a forma ilusória: $\frac{0}{0}$.

Por transformação, obtemos (**43**):

$$\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 2x}{2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Para todo valor de x diferente de zero, a expressão dada (1), pode se escrever, por simplificação de $\operatorname{sen}^2 x$:

$$4 \cos^2 x.$$

Quando x tende para 0, esta expressão tende para 4 como limite, e permanece sempre igual a (1). Logo, admite-se que, no limite também se tenha

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} = 2.$$

(*b*) A regra de L'Hôpital, aplicada duas vezes, dá sucessivamente:

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} = \lim_{x=0} \frac{4 \operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x=0} \frac{8 \cos 2x}{4 \cos 2x} = 2.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Calcular o valor numérico das expressões seguintes:

218. — $\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$, para $x = 0$.

219. — $\dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$, para $x = 0$.

220. — $\operatorname{tg} x . \operatorname{cotg} x$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

221. — $\sec x - \operatorname{tg} x$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

222. — $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$, para $x = a$.

223. — $\dfrac{\operatorname{sen} m a}{\operatorname{sen} n a}$, para $a = 0$.

§ II — Variações das funções trigonométricas

272. — Funções trigonométricas. — Já estudamos (Unidade VII) as variações das funções circulares simples e os gráficos que representam essas variações.

Consideraremos agora funções que incluem diversas funções circulares simples de um arco variável x ou de algum múltiplo ou submúltiplo desse arco. Além disso as funções simples poderão vir acompanhadas de coeficientes numéricos.

O estudo das funções trigonométricas não difere essencialmente do estudo das funções algébricas. Por esse motivo recordaremos alguns princípios que o aluno poderá encontrar amplamente desenvolvidos na ***Álgebra, curso Superior, F. T. D.***

273. — Pontos notáveis de uma função. — Os pontos notáveis de uma função

$$y = \mathrm{f}(x)$$

são os valores numéricos da variável independente x, para os quais o gráfico da função apresenta alguma particularidade. Eis os principais.

(**a**) Valores de x para os quais a função é nula. São as raízes, x_1, x_2, x_3,... da equação:

$$\mathrm{f}(x) = 0.$$

Para esses valores de x o gráfico intercepta o eixo de abscissas $X'X$.

(**b**) A ***ordenada na origem***, é o valor da função para $x = 0$.

(**c**) Os pontos de ***descontinuidade*** ou valores de x para os quais o limite de $\mathrm{f}(x)$ é $\pm \infty$.

(**d**) Os ***máximos*** e ***mínimos*** da função, correspondentes aos valores de x para os quais a função deixa de crescer, em valor absoluto, para começar a decrescer. Nesses pontos o gráfico se torna paralelo ao eixo $X'X$.

Num ***máximo*** a derivada $\mathrm{f}'(x)$ é nula e passa de $+$ para $-$. E, pois que a derivada decresce, passando de $+$ para $-$, a derivada segunda $\mathrm{f}''(x)$ é negativa para o valor de x correspondente ao máximo.

Num ***mínimo***, a derivada $\mathrm{f}'(x)$ é nula e passa de $-$ para $+$; a derivada segunda $\mathrm{f}''(x)$ é, portanto, positiva nesse ponto.

Temos, pois, resumindo:

um MÁXIMO, em x_0, se: $\mathrm{f}'(x_0) = 0$ e $\mathrm{f}''(x_0) = \overset{\frown}{-}$
um Mínimo, em x_0, se: $\mathrm{f}'(x_0) = 0$ e $\mathrm{f}''(x_0) = \underset{\smile}{+}$

(**e**) Os ***pontos de inflexão*** ou valores de x para os quais a curva passa de ***côncava*** a ***convexa***. Nesses pontos, a derivada primeira passa por um máximo ou por um mínimo; portanto, devemos ter $f''(x_0) = 0$. Se tivermos, ao mesmo tempo $f'(x_0) = 0$, teremos um ponto de ***inflexão horizontal.***

(*f*) No caso das ***funções periódicas,*** deve-se, logo de início, determinar o ***período*** ou intervalo da variável dentro do qual a função passa por todos os valores que podem corresponder a essa mesma função. Terminado o período, todos esses valores se repetirão na mesma ordem e a curva apresentará, no segundo período, uma forma idêntica à do primeiro período.

As funções sen x e cos x têm como período 2π; nas funções tg x e cotg x o período é π.

$y = \operatorname{sen} x + 3\cos x$ tem o período igual a 2π

$y = \operatorname{sen} 3x + 1$ $\qquad \dfrac{3\pi}{2}$

$y = 2\cos^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$ $\qquad 4\pi$

(Ver o número 96).

274. — *Estudo da função:*

$$y = 3\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x.$$

(a). — Esta função pode ser considerada como sendo a soma das duas funções:

$$y_1 = 3\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad y_2 = \sqrt{3}\cos x$$

As funções y_1 e y_2 têm como período 2π. Logo, a função y terá mesmo período, 2π.

A função y_1 é representada por uma senóide, na qual as ordenadas foram multiplicadas por 3 (n.º 96) e a função y_2 é representada por uma co-senóide na qual as ordenadas foram multiplicadas por $\sqrt{2}$.

O gráfico dessa função poderia ser obtido imediatamente, traçando-se os gráficos conjuntos de y_1 e de y_2 e somando-se, algèbricamente, as ordenadas correspondentes de alguns valores de x (Unidade VII).

(b). — **Estudo analítico.** — Seja a função:

$$y = 3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x \qquad (1)$$

e as suas primeiras duas derivadas:

$$y' = 3 \cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x \qquad (2)$$

$$y'' = -3 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x \qquad (3)$$

1.° A função (1) anula-se para:

$$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} x.$$

Esta equação dá os dois valores de x:

$$x_1 = 150^\circ \quad \text{e} \quad x_2 = 330^\circ$$

para os quais o gráfico intercepta o eixo $X'X$.

2.° A função derivada (2) anula-se para:

$$3 \cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 0$$

ou,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

donde:

$$x_3 = 60^\circ \quad \text{e} \quad x_4 = 240^\circ.$$

Estes são dois pontos críticos que podem corresponder a máximos ou a mínimos e que vamos examinar.

Para $x_3 = 60^\circ$, temos: $y'' = \frown$; *máximo.*

Para $x_4 = 240^\circ$, temos: $y'' = \underset{\smile}{+}$; *mínimo.*

3.º A função derivada (3) anula-se para:

$$-3 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

ou
$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

donde:
$$x_5 = 150^\circ \quad \text{e} \quad x_6 = 330^\circ.$$

São estas as abscissas de dois pontos de inflexão e vemos que correspondem aos pontos x_1 e x_2 para os quais a função é nula.

4.º Nos pontos x_1 e x_2 a curva faz com a direção positiva do eixo $X'X$ ângulos θ e θ' dados respectivamente pelas equações:

$$\operatorname{tg} \theta = 3 \cos 150^\circ - \sqrt{3} \operatorname{sen} 150^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \theta' = 3 \cos 330^\circ - \sqrt{3} \operatorname{sen} 330^\circ = -2\sqrt{3}.$$

donde:
$$\theta = 106^\circ\, 10'$$

e
$$\theta' = 73^\circ\, 50'$$

Para que tenhamos este ângulo é necessário que adotemos a mesma unidade linear nos dois eixos de coordenadas.

(c). — **Forma de curva.** — Vamos demonstrar que a curva obtida é ainda uma senóide.

Com efeito ,temos:

$$y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 3 \left(\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x\right).$$

Façamos:
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \varphi$$

donde
$$\varphi = 30^\circ.$$

Teremos então:

$$y = 3\,(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \varphi \cos x) = 3\,(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \cos x) =$$

$$= \frac{3}{\cos \varphi}\,(\operatorname{sen} x \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos x) = \frac{3}{\cos \varphi} \operatorname{sen}(x+\varphi) =$$

$$= \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(x + \varphi) = 2\sqrt{3}.\operatorname{sen}(x+30^\circ).$$

Logo, a função dada tem um gráfico análogo ao da função $\operatorname{sen} x$. As ordenadas dessa função são multiplicadas por $2\sqrt{3}$ e o período está adiantado de 30° em relação à função $\operatorname{sen} x$.

(d). — **Quadro das variações**. — Eis um quadro que resume as variações da função: As flechas indicam se a função cresce ↗, ou decresce ↘, no intervalo considerado.

x	0°	↗	60°	↗	150°	↗	240°	↗	330°	↗	360°
y	$\sqrt{3}$	↗	$2\sqrt{3}$ max.	↘	0	↘	$-2\sqrt{3}$ min.	↗	0	↗	$\sqrt{3}$
y'	+	+	0	—	—	—	0	+	+	+	+
y''	—	—	—	—	0 inflex.	+	+	+	0 inflex.	—	—

Gráfico. — Tracemos primeiro o círculo O de raio 1. Pela origem dos arcos A, tracemos os eixos $X'X$ e $Y'Y$. Sobre $X'X$ levemos um segmento igual a π ou 6,28 aproximadamente e assinalemos π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, assim como os pontos críticos estudados: 60°, 150°, 240°, 330°.

Sobre $Y'Y$ marquemos os pontos correspondentes a ± 1, $\pm\sqrt{3}$ e $\pm 2\sqrt{3}$.

A curva senóide foi traçada em pontilhado para servir de guia. Vêm, depois, assinaladas as curvas componentes $2 \text{ sen } x$ e $\sqrt{3} \cos x$ e enfim, em traço cheio, a resultante ou gráfico da função proposta.

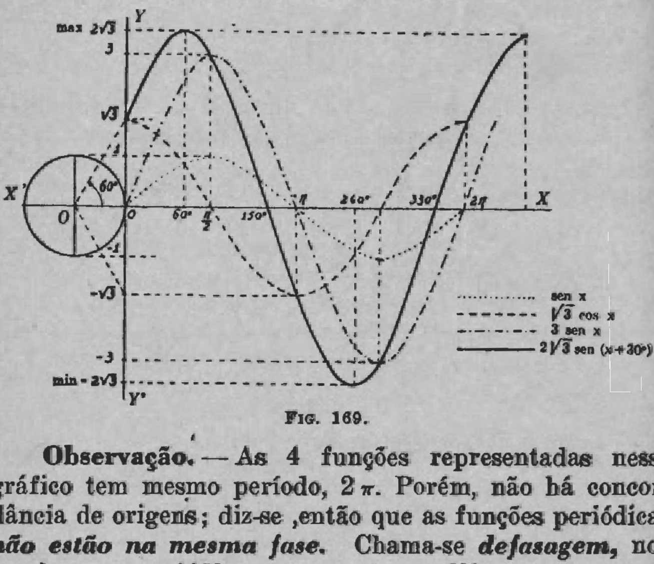

Fig. 169.

Observação. — As 4 funções representadas nesse gráfico tem mesmo período, 2π. Porém, não há concordância de origens; diz-se ,então que as funções periódicas ***não estão na mesma fase.*** Chama-se ***defasagem,*** nos movimentos periódicos comparados, a diferença dos arcos entre as origens dos períodos respectivos.

Assim vemos que as funções $\text{sen } x$ e $\text{sen } 3x$ estão ***em fase;*** os períodos começam e terminam num mesmo valor do arco variável.

Comparada com essas duas funções, a função $\cos x$ está adiantada de $\frac{1}{4}$ de fase ou $\frac{\pi}{2}$. Notemos que a função $\sqrt{3} \cos x$ também se escreve:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Do mesmo modo, a função resultante está adiantada de 30° ou $\frac{\pi}{6}$. Já vimos, aliás, que essa função se escreve na forma:

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,(x+30^\circ) \quad \text{ou} \quad 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

O coeficiente, $2\sqrt{3}$, indica a amplitude e $\frac{\pi}{6}$ o adiantamento de fase em relação à função de comparação sen x.

De modo geral, uma função de período 2π, com amplitude a e face φ e escreverá na forma

$$a\,\mathrm{sen}\,(x+\varphi);$$

φ será ***positivo*** no caso de ***adiantamento*** de fase e ***negativo*** no caso de ***atraso*** de fase.

275. — Estudo da função $y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

O período é 2π.

A função é definida apenas para

$$\cos 2x > 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$$

ou para

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

A curva é simétrica em relação à origem porque a função muda de sinal e toma o mesmo valor numérico para dois arcos x_1 e x_2 simétricos em relação à origem.

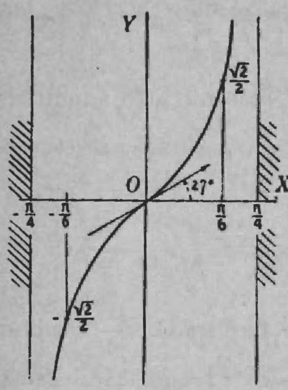

FIG. 170.

Bastará, pois, examinar a função de 0 até $\frac{\pi}{4}$ e completar o ramo negativo por simetria.

A derivada

$$y' = \frac{\cos x}{2 \cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$$

é sempre positiva e passa por um mínimo para $x = 0$. Logo a função é sempre crescente e tem um ponto de inflexão na origem.

Há descontinuidade para $x = \frac{\pi}{4}$.

A figura 170 representa o gráfico da função no intervalo que essa função é definida.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

224. — Estudar as variações da função

$$y = \text{sen } x + \cos x.$$

225. — Estudar as variações de:

$$y = 2 \text{ sen } x + 3 \text{ sen } (x + \frac{\pi}{6}).$$

226. — As elongações de dois movimentos periódicos são dada pelas equações:

$$e_1 = \text{sen } \alpha \quad \text{e} \quad e_2 = \text{sen } (\alpha - 45°);$$

determinar a equação da elongação resultante, $e_1 + e_2$, e estudar-lhe as variações.

227. — Estudar as variações da função

$$y = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x;$$

228. — Estudar as variações da função (fig. 171):

$$y = 2(\cos^2 x - \cos x)$$

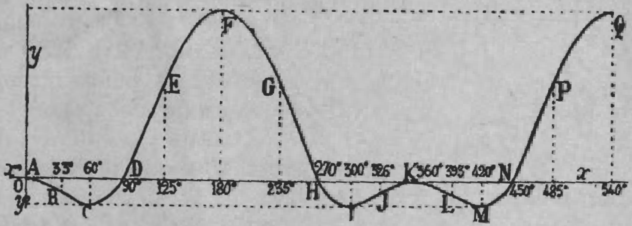

FIG. 171.

§ III — Coordenadas polares

275. — **Definições.** — Seja o ponto fixo O e a semi-reta OX. Um ponto qualquer A, de um plano que contém OX pode ter a sua posição determinada em relação ao ponto O e ao semi-eixo positivo.

Tracemos $OA = \rho$. Seja θ o ângulo do vector OA com o sentido positivo do semi-eixo OX. Os elementos ρ e θ são as ***coordenadas polares*** do ponto A.

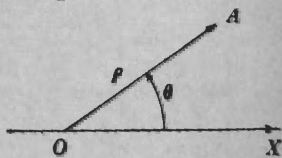

FIG. 172.

O ponto O é o ***polo***; $\overrightarrow{OA} = \rho$, é o ***raio vector*** do ponto A; o ângulo $XOA = \theta$ é o ***ângulo vector*** do ponto A.

O ângulo θ pode variar, como os arcos em trigonometria, de 0° até $\pm \infty$. O sentido positivo desses arcos é o mesmo do que em trigonometria. Consideraremos nestes exemplos apenas variações de 0° até + ou — 360° ou 2π.

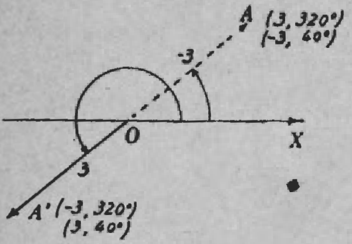

Fig. 173.

O **raio vector** ρ é positivo quando passa pela extremidade do arco correspondente e negativo quando o seu prolongamento, do outro lado do polo, passa pela extremidade do arco.

Assim o ponto A', fig. 173, tem como coordenadas polares: $\rho = 3$, $\theta = 220°$. As coordenadas do ponto A são: $\rho = -3$, $\theta = 220°$; ou, ainda: $\rho = 3$, $\theta = 40°$.

As coordenadas do ponto A', seriam também, em arcos negativos: $\rho = 3$, $\theta = -140°$.

Um ponto pode também corresponder a um arco maior do que 360°. Assim, as coordenadas do ponto A são, de modo geral: $\theta = 2k\,\pi + 220°$.

276. — Relações entre as coordenadas cartesianas retangulares e as coordenadas polares. — Seja o ponto O a origem das coordenadas retangulares e conjuntamente o polo das coordenadas polares.

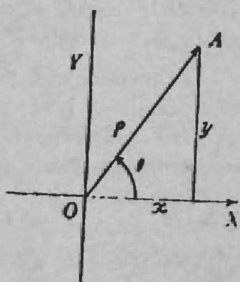

Fig. 174.

Um ponto A, do plano XOY, tem como coordenadas retangulares x e y e como coordenadas polares correspondentes ρ e θ.

O triângulo retângulo OAQ dá as seguintes relações:

(1) $x^2 + y^2 = \rho^2$ (3) $y = \rho \operatorname{sen} \theta$

(2) $x = \rho \cos \theta$ (4) $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{y}{x}$

Estas quatro relações permitem passar do sistema de coordenadas retangulares para as coordenadas polares.

277. — Aplicações. — I. ***Escrever em coordenadas polares, a equação da reta:*** $2x + y = 3$.

Obtemos logo, por causa das relações (**2**)e (**3**):

$$2\rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta = 3.$$

II. — ***Identificar a curva*** $\rho^2 = \dfrac{9}{4 - \cos^2\theta}$.

Pelas relações (**1**) e (**2**), temos:

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4 - \dfrac{x^2}{x^2+y^2}}.$$

ou, depois de reduzir e simplificar por (x^2+y^2):

$$3x^2 + 4y^2 = 9$$

ou

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9/4} = 1.$$

É, pois, a equação de uma ***elipse.***

278. — Gráfico de uma função em coordenadas polares. — O gráfico das funções dadas em coordenadas polares pode ser obtido ***por pontos,*** como no caso das coordenadas retangulares. Basta para isso atribuir diversos valores numéricos ao ângulo θ e determinar os valores correspondentes de ρ. Geralmente, divide-se o círculo (360°) em certo número de partes iguais e procura-se a posição dos pontos da curva nos raios vectores correspondentes a cada um dos ângulos. Ligam-se, depois, os pontos obtidos por meio de uma curva contínua.

Em muitos casos é bastante fácil fazer um estudo analítico da função de modo a determinar os máximos e mínimos de ρ assim como a direção da curva na sua passagem pelo polo ou em outro qualquer ponto.

Eis alguns exemplos.

279. — Gráfico polar de $\rho = 4$ sen θ. — 1.° Notemos logo que a função é máxima para sen $\theta = 1$, ou $\theta = 90°$, onde $\rho = 4$. A função é nula para

$$\text{sen}\,\theta = 0, \quad \text{ou} \quad \rho = 0° \text{ e } 180°.$$

Para $\theta = 30°$ e $150°$, temos $\rho = 2$.

Para $\theta = 60°$ e $120°$, temos $\rho = 2\sqrt{3}$.

2.° Notemos ainda que uma variação de θ de 0° até 180° nos dá todos os pontos da curva. Assim, para $(180°+30°)$, teremos:

$$\text{sen}\,(180°+30°) = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}.$$

E as coordenadas do ponto correspondente serão

$$\rho = -\frac{1}{2}, \qquad \theta = 210°$$

ou, ainda: $$\rho = \frac{1}{2}, \qquad \theta = 30°;$$

é um ponto já obtido.

3.° O quadro abaixo dá as principais variações e a figura 175 reproduz o gráfico: um *círculo*, tangente ao eixo polar em O.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°
ρ	0	2	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0	-2	$-2\sqrt{3}$

4.º Com efeito, seja P, figura 176, um ponto qualquer do gráfico. Tracemos o diâmetro OM e o triângulo retângulo OPM. Seja R o raio do círculo; temos:

$$\rho = 2\, R \operatorname{sen} \theta.$$

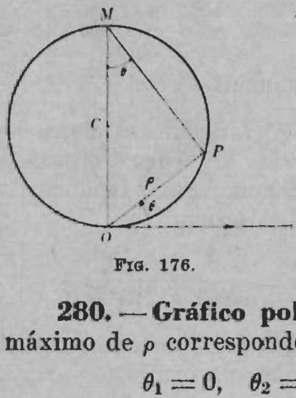

FIG. 176.

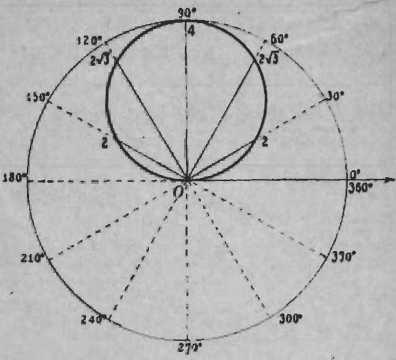

FIG. 175.

A equação $\rho = 4 \operatorname{sen} \theta$, representa um círculo de raio 2, no qual um dos seus pontos O, serve de polo.

280. — Gráfico polar de $\rho^2 = 4 \cos 2\,\theta$. — 1.º O máximo de ρ corresponde a $\cos 2\,\theta = 1$, ou:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 180; \quad \text{então, } \rho = 2.$$

2.º Quando θ varia de 0º até 45º, ρ varia de 2 até 0. Quando θ varia de 45º até 135º, $\cos 2\,\theta$ é negativo e a expressão é imaginária, não havendo nenhum ponto do gráfico que lhe corresponda.

Quando θ varia de 135º até 180º, ρ varia de 0 até 2.

Quando θ varia de 180º até 360º, as mesmas variações se repetem.

Os valores reais de ρ são simétricos em relação ao polo, por causa do duplo sinal da raiz quadrada.

Temos o seguinte quadro das variações de 15 em 15 graus:

θ	0°	15°	30°	45°	....	135°	150°	165°	180°
ρ	± 2	± 1.86	± 1.40	0	imag.	0	$\pm 1,40$	$\pm 1,86$	± 2

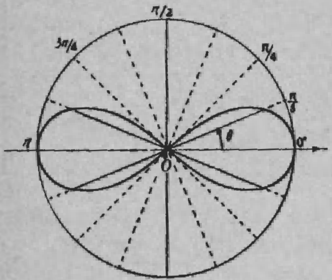

FIG. 177.

Nota. — Para o traçado da curva é mais cômodo traçar os raios vectores $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{8}$, porque os diâmetros em $\pi/4$ e $\frac{3\pi}{4}$ são tangentes à curva no polo. A curva obtida é denominada Lemniscata de Bernoulli.

281. — Gráfico polar de $\rho = \dfrac{2}{\cos(\theta - 30^\circ)}$.

1.° — Para $\theta = 30°$, o denominador é máximo e igual a 1; isto corresponde com um mínimo da função, ou $\rho = 2$.

Para $\theta = 0°$, a função é igual a:

$$\frac{2}{\cos(-30^\circ)} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}/2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

É este o ponto em que o gráfico intercepta o semi-eixo polar positivo.

Para os arcos $\theta_1 = 120°$ e $\theta_2 = 300°$ a função é infinita.

Quando θ tende para 120°, por valores inferiores a 120°, ou para —60° por valores inferiores (em valor absoluto) a 30°, a função tende para $+\infty$.

Para arcos compreendidos entre 120° e 300°, a função é negativa e repetem-se todos os valores numéricos já obtidos.

Eis o quadro das variações:

θ	$-60°$	$-30°$	...	$-15°$	$0°$	$15°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$	$300°$
ρ	$\pm\infty$	4	...	$2\sqrt{2}$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$2{,}08$	2 min.	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	4	$\pm\infty$	$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$	-4	$\pm\infty$

2.° Ligando-se os pontos assim determinados obtém-se uma ***reta*** que faz 120° com a direção possitiva do semi-eixo polar.

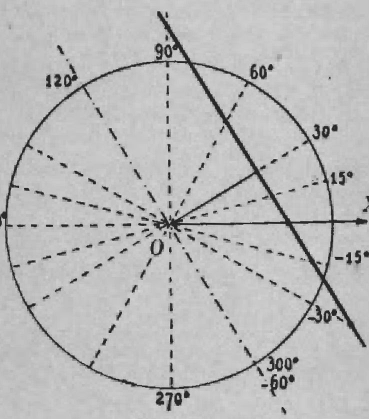

FIG. 178.

Com efeito, seja P um ponto qualquer dessa reta (fig. 179) e N, o pé da perpendicular traçada do polo O sobre a reta.

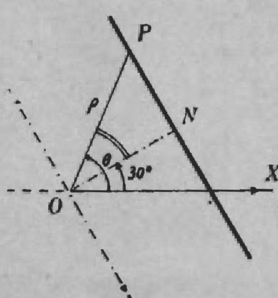

FIG. 179.

O triângulo retângulo OPN, dá:

$$ON = \rho \cos(\theta - 30°),$$

ou $$\rho = \frac{ON}{\cos(\theta - 30°)}.$$

Fazendo variar ON, obtemos um feixe de retas paralelas. Neste caso particular, temos $ON = 2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

229. — Localizar cada um dos pontos seguintes, dados em coordenadas polares:

(*a*) $\varrho = 1,\ \theta = 45^\circ$ (*d*) $\varrho = 6,\ \theta = -20^\circ$

(*b*) $\varrho = 5,\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$ (*e*) $\varrho = -2,\ \theta = -\dfrac{\pi}{8}$

(3) $\varrho = -\sqrt{2},\ \theta = \dfrac{2\pi}{5}$ (*f*) $\varrho = -\sqrt{3},\ \theta = -400^\circ$.

230. — Calcular as coordenadas retangulares de cada um dos pontos dados no exercício precedente.

231. — Identificar as funções seguintes (círculo, elipse, parábola, hipérbole, reta) calculando prèviamente a sua equação em coordenadas retangulares:

(*a*) $\varrho = 9$ (*d*) $\varrho = \dfrac{2}{\cos\theta}$

(*b*) $\varrho = \cos\theta$ (*e*) $\varrho^2\cos 2\theta = 9$

(*c*) $\varrho = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ (*f*) $\varrho\,\mathrm{sen}\,\theta = \varrho^2\cos^2\theta - 1$

232. — Traçar o gráfico por pontos das funções seguintes:

(*a*) $\varrho = 2\theta$ (Espiral de Arquimedes).

(*b*) $\varrho = 2\cos\theta + 1$ (Caracól de Pascal).

233. — Estudar as variações da função

$$\varrho = 2 + \cos 2\theta - 2\cos\theta.$$

234. — Estudar as variações da função

$\varrho = a \cos 2\theta$. (Rosaça de 4 folhas).

APÊNDICE

NOTA I

COMPLEMENTOS SOBRE VECTORES E PROJEÇÕES

282. — Classificação dos vectores. — Um vector pode ser:

1) **Livre,** quando a sua origem pode coincidir com qualquer ponto do espaço. Um vector livre conserva sempre os seus característicos de direção, sentido, e módulo; pode apenas ter um movimento de ***translação,*** isto é, deslocar-se paralelamente à direção do seu suporte.

2) **Localizado** ***em um ponto*** ou ***em um eixo,*** conforme tiver a sua origem fixa num ponto ou puder ***deslizar*** livremente sobre um eixo.

283. — Relações entre vectores livres. — Versor. — 1) ***Vector unitário*** de um eixo é um vector localizado sobre esse eixo, que tem por módulo a unidade e como sentido o sentido positivo do eixo.

2) ***Versor,*** $\vec{u}$, é um vector unitário localizado sobre um vector; permite avaliar o módulo ou grandeza de um vector (fig. 180).

FIG. 180.

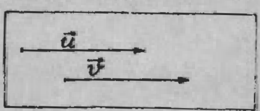

FIG. 181.

3) ***Vectores equipolentes*** são vectores paralelos, de mesmo sentido e mesmo módulo.

Entre dois vectores equipolentes existe a seguinte equivalência ou ***equipolência***:

$$\vec{u} = \vec{v}$$

As equipolências têm mesmas propriedades do que as igualdades aritméticas.

4) ***Vectores opostos*** têm direções paralelas e sentidos contrários.

5) ***Vectores colineares*** são vectores livres de mesma direção.

6) ***Vectores coiniciais*** têm suas origens no mesmo ponto do espaço.

284. — Soma geométrica de dois vectores. — — Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dois vectores livres, não colineares (fig. 182).

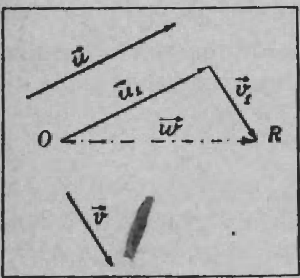

FIG. 182.

Pela origem O, escolhida arbitràriamente, tracemos o vector $\vec{u}_1$ equipolente a $\vec{u}$. Translademos também o vector $\vec{v}$ de modo que sua origem venha a coincidir com a extremidade de $\vec{u}_1$; obtemos o vector $\vec{v}_1$. O vector $\vec{w}$, que tem a origem na origem do 1.º vector e a extremidade, na do 2.º vector, é, por definição, a ***soma geométrica*** ou ***resultante*** dos vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

Indicamos a ***operação vectorial*** realizada com a seguinte equipolência:

$$\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1;$$

ou (pois que $\vec{u}_1 = \vec{u}$ e $\vec{v}_1 = \vec{v}$)

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Estes três vectores, não colineares, formam um ***triângulo*** no qual verificamos as seguintes propriedades:

$$w < u + v;$$

$$\text{e} \quad w > u - v;$$

isto é:

o módulo da resultante é menor do que a soma dos módulos dos vectores componentes e maior do que a sua diferença.

285. — Paralelogramo da soma vectorial. — Sejam os vectores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (fig. 183). Tracemos, pelo ponto O, os vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{v}_2$, equipolentes a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e completemos o paralelogramo traçando $\vec{u}_2$ e $\vec{v}_1$.

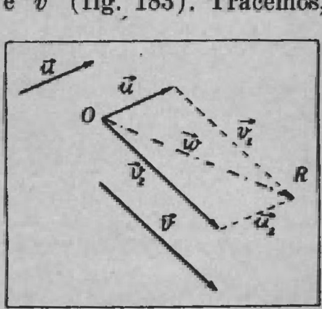

FIG. 183.

A diagonal deste paralelogramo, traçada pela origem do primeiro vector e a extremidade do segundo é o módulo do vector resultante $\vec{w}$.

Neste paralelogramo temos as seguintes propriedades:

$$\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}. \qquad (1)$$

e

$$\vec{w} = \vec{v}_2 + \vec{u}_2 = \vec{v} + \vec{u}. \qquad (2)$$

As equipolências (1) e (2) demonstram a ***propriedade comutativa*** da soma de dois vectores; isto é:

não se altera a resultante quando se inverte a ordem dos vectores componentes.

286. — Soma de mais de dois vectores. — Sejam os quatro vectotres $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ $\vec{u}$, que vamos somar vectorialmente (fig. 184).

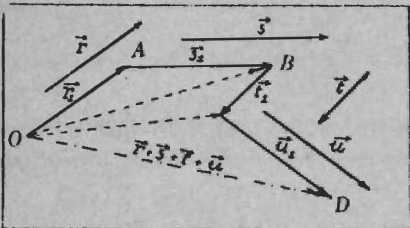

FIG. 184.

Pelo ponto O do espaço tracemos um vector equipolente a $\vec{r}$; pela extremidade deste um segundo vector equipolente a $\vec{s}$; e assim por diante até esgotar todos os vectores.

O vector que une a origem do primeiro com a extremidade do segundo é o vector ***resultante*** ou soma geométrica dos 4, ou mais, vectores. Notemos que:

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r} + \vec{s};$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r} + \vec{s} + \vec{t};$$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{r} + \vec{s} + \vec{t} + \vec{u}.$$

287. — Soma de vectores colineares. — **1.°** Sejam os vectores colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesmo sentido. Sobre um suporte comum $x'x$ tracemos dois vectores equipolentes a

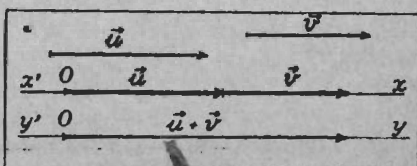

FIG. 185.

$\vec{u}$ e a $\vec{v}$ de modo que a extremidade do primeiro coincida com a origem do segundo.

O vector resultante $\vec{u} + \vec{v}$ tem um módulo igual à soma dos módulos dos vectores componentes, tem mesma direção e mesmo sentido do que esses vectores.

2.° Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$, dois vectores colineares e de sentidos contrários (fig. 186).

Sejam $\vec{OA} = \vec{r}$ e $\vec{AB} = \vec{s}$, dois vectores equipolentes aos vectores dados e traçados sobre o mesmo suporte $x'x$.

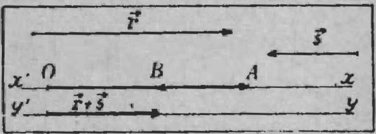

FIG. 186.

A resultante é representada sobre o eixo $y'y$; é igual a: $\vec{r} + \vec{s}$.

O módulo da resultante é igual à diferença aritmética dos valores absolutos dos vectores $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

O vector resultante é equipolente dos vectores componentes e tem o sentido do vector cujo módulo é maior. Concluímos, pois, que:

A resultante de dois vectores colineares tem um valor algébrico igual à soma das medidas algébricas (n.° 15) dêsses mesmos vectores.

Notas. — **1)** Desde que é sempre possível somar um novo vector colinear com o vector resultante da soma de dois outros, podemos generalizar e aplicar o princípio acima enunciado a um número qualquer de vectores colineares. E assim concluímos que:

A medida algébrica da resultante de vectores colineares é a soma das medidas algébricas desses vectores.

2) *Dois vectores colineares, iguais e de sentidos contrários, têm resultante nula.*

288. — Teorema de Chasles. — *Dados vários pontos* A, B, C, D, ... K, L, *localizados sobre uma reta orientada* x′x, *teremos a relação:*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots. + \overline{KL} + \overline{LA} = 0. \quad (1)$$

Com efeito, temos:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots. + \overline{KL} = \overline{AL};$$

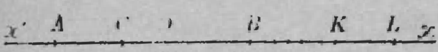

Fig. 187.

Substituindo este valor na relação de Chasles, temos:

$$\overline{AL} + \overline{LA} = 0.$$

Esta relação é uma identidade porque os segmentos $\overline{AL}$ e $\overline{LA}$ têm medidas algébricas iguais e de sinais contrários; a sua soma é nula.

Nota II

PROJEÇÕES — TEOREMA DE CARNOT

289. — Projeção de um ponto sobre um plano. — Seja o plano P, e um ponto A, situado acima deste plano (fig. 188).

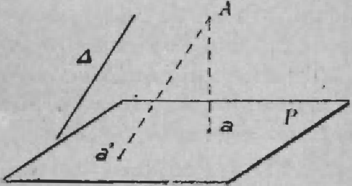

Fig. 188.

Projeção ortogonal do ponto A sobre o plano P é, por definição, o pé a, da perpendicular abaixada do ponto sobre o plano. Em geral designa-se o ponto do espaço por uma letra maiúscula e a projeção deste ponto pela letra minúscula correspondente. A reta Aa é a ***projetante ortogonal.***

Projeção oblíqua do ponto A, sobre o plano P, é o pé a, sobre o plano P, da oblíqua que passa pelo ponto A. A oblíqua é uma projetante de direção Δ. A direção comum Δ, das projetantes de um sistema de pontos é a ***diretriz*** da projeção.

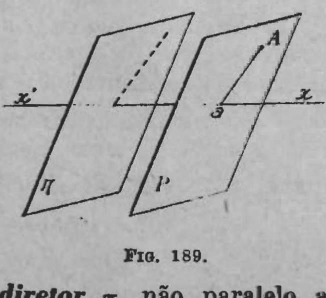

Fig. 189.

Seja, fig. 189, um eixo $x'x$ e A, um ponto fora deste eixo.

Vamos projetar o ponto A sobre o eixo xx' de tal modo que a projetante Aa, seja paralela a um ***plano diretor*** π, não paralelo ao eixo.

Pelo ponto A, passemos um plano P, paralelo ao plano π; este plano intercepta o eixo $x'x$ num ponto a, que é por definição, a projeção de A sobre o eixo.

Se o plano diretor π fosse perpendicular ao eixo, o mesmo aconteceria com o plano P; e então, a projetante Aa, situada num plano perpendicular à reta $x'x$ seria também perpendicular à mesma reta. Neste caso teríamos a ***projeção ortogonal*** do ponto A, sobre o eixo $x'x$.

Nota. — A projetante Aa é paralela ao plano π e, portanto, a ***certa reta*** marcada em pontilhado sobre esse mesmo plano. As figuras representam, em geral, os planos e as retas em ***perspectiva cavaleira***, que admite o seguinte ***princípio: As retas paralelas do espaço ficam paralelas no desenho.***

291. — Projeção de um segmento de reta sobre um eixo. — Seja o segmento de reta $\overline{AB}$, não situado no plano da figura. Pelos pontos A e B, extremidades do segmento, tracemos paralelas ao plano π, que passem por um eixo $x'x$. Sejam a, e b, os pontos assim determinados sobre o eixo.

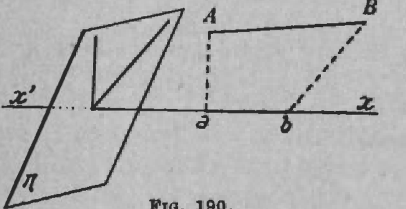

Fig. 190.

Para bôa compreensão desta figura, veja-se a nota do número precedente.

Por definição, o valor algébrico do segmento ab é a projeção do segmento $\overline{AB}$ sobre o eixo $x'x$. Esta projeção será positiva se tiver o sentido positivo do eixo; será negativa no caso contrário. Assim, a projeção de $\overline{AB}$, é $\overline{ab}$, número positivo. A projeção de $\overline{BA}$ é $\overline{ba}$, número negativo. Escrevemos simbòlicamente:

$$\text{proj. } \overline{AB} = \overline{ab}.$$

Notas. — 1) ***Se o plano π fosse perpendicular ao eixo,*** teriamos uma ***projeção ortogonal*** do segmento $\overline{AB}$ sobre esse eixo. As projetantes seriam perpendiculares ao eixo.

2) Se os pontos A e B, extremidades do segmento, estivessem num plano paralelo ao plano diretor π, as suas intersecções com o eixo seriam confundidas num só ponto; o segmento $\overline{AB}$ teria projeção nula.

A condição para que um segmento tenha projeção nula é, pois, ***que este segmento seja nulo ou que ele seja paralelo ao plano diretor.***

3) ***Se um segmento $\overline{AB}$ for paralelo ao eixo,*** a sua projeção $\overline{ab}$, sobre este eixo, terá mesma medida algébrica do que o segmento dado.

292. — Projeção de um vector sobre um eixo. — Seja o vector $\overrightarrow{AB}$, o eixo $x'x$, e o plano diretor π. A projeção do vector $\overrightarrow{AB}$ sobre o eixo $x'x$ é um vector $\overrightarrow{ab}$, localizado sobre o eixo $x'x$.

A medida algébrica deste vector é $\overline{ab}$, positiva ou negativa conforme ab tiver o sentido positivo ou o sentido negativo do eixo $x'x$.

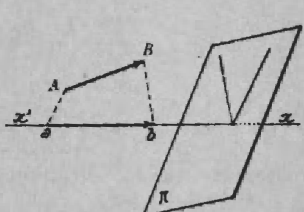

FIG. 191. — *Projeção de um vector sobre um eixo.*

293. — Teorema de Carnot. — ***A projeção da soma geométrica de dois ou mais vectores sobre um eixo, é igual à projeção da resultante desses vectores sobre o mesmo eixo.***

Sejam os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DE}$, somados vectorialmente. Têm como resultante o vector $\overrightarrow{AE}$.

Projetemos o contorno poligonal $ABCDE$ sobre o eixo xx', paralelamente ao plano diretor π. (fig. 192).

A projeção do vector $\overrightarrow{AB}$ é o vector $\overrightarrow{ab}$, sobre $x'x$. Do mesmo modo, $\overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{cd}$, e $\overrightarrow{de}$ são as projeções dos vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DE}$.

A resultante $\overrightarrow{DE}$ ou $\overrightarrow{R}$ tem como projeção o vector $\overrightarrow{ae}$ ou $\overrightarrow{r}$.

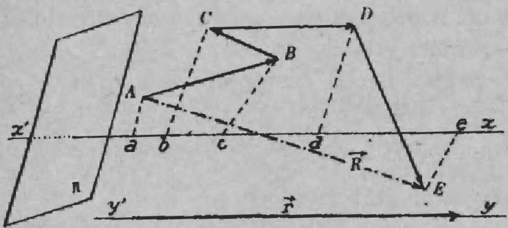

FIG. 192. — *Projeção de uma soma vectorial.*

Com efeito, podemos aplicar o teorema da Chasles aos segmentos do eixo $x'x$, e temos:

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de} + \overrightarrow{ea} = 0;$$

ou, acrescentando aos dois membros desta equipolência o vector $\overrightarrow{ae}$ e notando-se que: $\overrightarrow{ea} + \overrightarrow{ae} = 0$ (**n.° 21**, Nota 2), temos:

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de} = \overrightarrow{ae}.$$

Logo:

$$\text{pr}\ \overrightarrow{AB} + \text{pr}\ \overrightarrow{BC} + \text{pr}\ \overrightarrow{CD} + \text{pr}\ \overrightarrow{DE} = \text{pr}\ \overrightarrow{AE}.$$

Notas. — 1) ***A projeção de um contorno poligonal fechado, sobre um eixo qualquer é nula.***

Com efeito, o contorno $ABCDEA$, fig. 23, tem resultante nula. Logo, a projeção desta resultante é também nula.

2) A recíproca nem sempre é verdadeira. Com efeito, um contorno pode ter projeção nula sem ser fechado; basta para isto que a resultante seja paralela ao plano diretor (n.° **291**, Nota 2).

Nota III

NÚMEROS COMPLEXOS — FÓRMULA DE MOIVRE. MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DOS ARCOS

294. — Número complexo. — Todo número da forma

$$a + bi$$

em que a e b são números reais e i é o ***imaginário*** $\sqrt{-1}$, é um ***número complexo.***

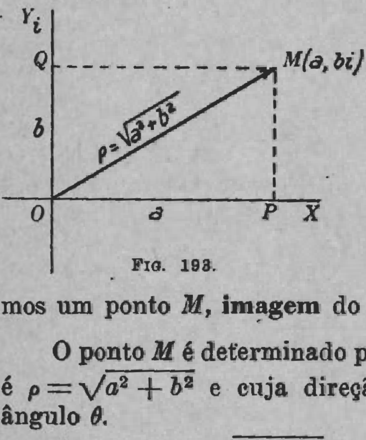

Fig. 193.

Sejam, fig. 193, dois eixos retangulares OX e OY_1. Sobre o eixo OX levamos a parte real a, do complexo e sobre o eixo OY_1, tomamos um segmento b, proporcional ao coeficiente do imaginário i.

No plano XOY obtemos um ponto M, **imagem** do imaginário $a + bi$.

O ponto M é determinado pelo vector $\overrightarrow{OM}$ cujo módulo é $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e cuja direção faz com o eixo OX o ângulo θ.

A expressão $\sqrt{a^2 + b^2}$ é o ***módulo do imaginário*** e o ângulo θ é o ***argumento do imaginário.*** Este argumento admite uma infinidade de determinações dadas pela relação

$$\theta = 2k\pi + \theta$$

sendo k um número inteiro qualquer ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) e θ a primeira determinação do argumento, correspondente a $k = 0$.

Forma trigonométrica. — A figura 193 dá as relações

$$a = \rho \cos \theta$$
$$b = \rho \operatorname{sen} \theta$$

donde tiramos:

$$a + bi = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta);$$

é a *forma trigonométrica* ou *polar* do imaginário, em que

ρ é o *módulo* ou $\sqrt{a^2+b^2}$

e θ é o *argumento* dado pelas relações

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemplo. — ***Escrever na forma trigonométrica o complexo dado na forma binomial:*** $1-\sqrt{3}\,i$.

Temos aqui: $a = 1$ e $b = -\sqrt{3}$; donde:

$$\rho = 2; \quad \cos \theta = \tfrac{1}{2}; \quad \operatorname{sen} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{ou,} \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{e} \quad \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Logo, temos:

$$1-\sqrt{3}\,i = 2\left[\cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

295. — Produto de complexos. — Dados os complexos:

$$\rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

e

$$\rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

teremos o produto:

$$\rho\,(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \times \rho_2\,(\cos_{\theta_2} + i \operatorname{sen}\theta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2\,(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + $$
$$+ i^2\operatorname{sen}\theta_,\operatorname{sen}\theta_2.$$

Substituindo i^2 pelo seu valor numérico, -1, e fatorando i, teremos:

$$\rho_1\rho_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\cos\theta_,\operatorname{sen}\theta_2 +$$
$$+ \operatorname{sen}\theta_,\cos\theta_2)\Big] = \rho_1\rho_2\Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2\Big].$$

O produto dos dois complexos tem, pois, ***um módulo igual ao produto dos módulos dos dois factores e um argumento igual à soma dos argumentos dos factores.***

De modo análogo obteríamos o produto de 3 ou mais factores complexos e generalizando teríamos, para n factores:

$$\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\Big[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\Big].$$

296. — Potenciação de complexos. Fórmula de Moivre. — No produto de vários complexos teríamos para n factores iguais:

$$\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3\cdot\ldots\cdot\rho_n = \rho^n$$
$$\text{e}\quad \theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n = n\theta$$

logo, a fórmula do produto do n.º 295 vem a ser:

$$\Big[\rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\Big]^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta);$$

é a ***fórmula de Moivre.***

Exemplo. — ***Calcular a 5.ª potência do complexo*** $1+i$.

Temos (n.º 296):

$$(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^5 =$$

$$= (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\,(1+i)$$

297. — Multiplicação dos arcos. — O problema de multiplicação de arcos consiste em calcular funções trigonométricas do arco $n\alpha$ por meio das funções do arco α. Este problema já foi resolvido, de modo elementar na Unidade XI para os arcos 2α e 3α.

A fórmula de Moivre fornece uma ***solução geral*** para esse problema.

Com efeito, na fórmula de Moivre façamos $\rho = 1$ e desenvolvamos a n-ésima potência por meio da fórmula do binômio; teremos:

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\,\theta + i\,\text{sen}\,n\,\theta =$$

$$= \cos^n\theta + i.C^1_n\cos^{n-1}\theta\,\text{sen}\,\theta + i^2.C^2_m\cos^{n-2}\theta\,\text{sen}^2\theta +$$

$$+ i^3C^3_n\cos^{n-3}\theta.\text{sen}^3\theta + i^4C^4_n\cos^{n-4}\theta.\text{sen}^4\theta +$$

$$+ i^5\,C^5_m\cos^{m-5}\theta.\text{sen}^5\theta + \ldots.$$

Substituindo-se as potências de i pelo seu valor, isto é: $i = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = -1$; etc., e factorando-se i, obtém-se um novo complexo da forma:

$$\left(\cos^n\theta - C^2_n\cos^{n-2}\theta.\text{sen}^2\theta + C^4_n\cos^{n-4}\theta.\text{sen}^4\theta - \ldots\right) +$$

$$+ i\left(C^1_n\cos^{n-1}\theta.\text{sen}\,\theta - C^3_n\cos^{n-3}\theta.\text{sen}^3\theta + \ldots\right).$$

Este complexo é idêntico ao complexo

$$\cos n\,\theta + i \operatorname{sen} n\,\theta;$$

logo, deverá existir identidade entre as partes reais e as partes imaginárias; e deveremos ter:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos n\,\theta = \cos^n\theta - C^2_n \cos^{n-2}\theta \,.\, \operatorname{sen}^2\theta \,+ \\ + \, C^4_n \cos^{n-4} \,.\, \operatorname{sen}^4\theta + \ldots\end{aligned}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} n\,\theta = C^1_n \cos^{n-1}\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta - C^3_n \cos^{n-3}\theta \operatorname{sen}^3 2\,\theta + \ldots}$$

Estas duas fórmulas nos dão $\cos n\,\theta$ e $\operatorname{sen} n\,\theta$ em função de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

Exemplo. — ***Calcular sen 3 θ e cos 3 θ em função de sen θ e cos θ.***

Teremos:

$$\cos 3\,\theta = \cos^3\theta - C^2 \cos\theta \operatorname{sen}^2_3 \cos\theta \operatorname{sen}^2 =$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta = \cos^3\theta(1-\cos^2\theta) =$$

$$= \cos^3\theta + 3\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$$

$$= \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 3).$$

$$\operatorname{sen} 3\,\theta = C^1_3 \cos^2\theta \,.\operatorname{sen}\theta - C^3_3 \cos^0\theta \,.\operatorname{sen}^3\theta =$$

$$= 3(1-\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta =$$

$$= 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta\,.\,(3 - 4\operatorname{sen}^2\theta).$$

298. — Divisão dos arcos. — Nas fórmulas (1) se fizermos $n\,\theta = \varphi$ ou $\theta = \dfrac{\varphi}{n}$, teremos as fórmulas:

$$\boxed{\cos\varphi = \cos^n\frac{\varphi}{n} - C_n^2\cos^{n-2}\frac{\varphi}{n}.\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{n} + C_n^4\cos^{n-4}\frac{\varphi}{n}.\operatorname{sen}^4\frac{\varphi}{n} - \ldots}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\frac{\varphi}{n}.\operatorname{sen}\frac{\varphi}{n} - C_n^3\cos^{n-3}\frac{\varphi}{n}.\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{n} + \ldots}$$

Estas equações contêm como incógnita $\frac{\varphi}{n}$ e podem servir, ***teòricamente***, para a resolução do problema geral de divisão dos arcos.

Para $n = 2$, obteremos duas equações do 2.º grau; para $n = 3$, equações do 3.º grau; e assim por diante. Pràticamente, portanto, o seu uso fica reduzido ao problema do cálculo de $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$ *e* $\cos\frac{\varphi}{2}$ em função de $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$.

Exemplos. — Calcular $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$ e $\cos\frac{\varphi}{2}$ em função de $\cos\varphi$

Temos logo:

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - C^2\cos^0\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 + \cos^2\frac{\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$$

donde:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}.$$

É a fórmula (**46**), já obtida por outro método (n.° 131).

Também temos (2):

$$\operatorname{sen}\varphi = C_2^1 \cos^{n-1}\frac{\varphi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2};$$

ou,

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{2\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(1-\cos^2\varphi)}{4(1+\cos\varphi)}} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}.$$

É a fórmula (**45**).

Nota. — Já para o arco $\frac{\varphi}{3}$, o problema seria impraticável. Deveríamos resolver as equações do 3.° grau:

$$4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} - \cos\varphi = 0$$

e $$4\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3} - 3\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3} + \operatorname{sen}\varphi = 0.$$

NOTA IV

USO DA RÉGUA LOGARÍTMICA

299. — A verificação e a resolução das questões de Trigonometria pode ser muito facilitada pelo uso da Régua Logarítmica. Damos a seguir a descrição da régua do tipo *Mannheim* (escolar) que se encontra à venda na maioria das casas de artigos escolares ou de desenho.

A teoria dessa régua baseia-se nos *logaritmos*. As escalas numéricas apresentam graduações *proporcionais aos logaritmos dos números* que sobre elas estão assinalados. Dai o seu nome de *Régua Logarítmica*, também chamada *Régua de Cálculo*.

300. — Descrição. — A régua é formada de 3 partes.

a) Régua fixa, ou *corpo;*

b) Régua *móvel;* desliza sobre a régua fixa.

c) *Cursor*, munido de lente e *retículo ou traço de leitura.*

O corpo da régua leva as escalas *A*, *D* e *K*.

A régua móvel traz, na *face superior* as escalas *B*, *C*1 e *C;* na *face inferior*, ou *verso*, traz as escalas *S*, *L* e *T*.

300. — Divisão e finalidades das escalas. — 1). — As escalas *C* e *D*, têm divisões indênticas (Fig. 194). Contêm 10 divisões principais,

1, 2, 3, . . ., 9, 1.

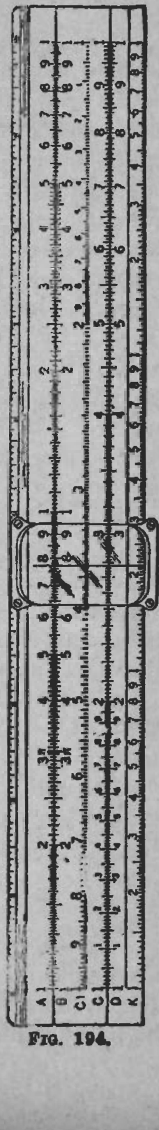

FIG. 194.

Cada intervalo entre estas divisões contém mais 10 divisões *secundárias*.. Entre as divisões principais 1 e 2, as divisões secundárias subdividem-se em 10 divisões *terciarias*. Entre cada uma das divisões secundárias de 2 até 4, existem apenas 5 divisões terciárias, de modo que, cada divisão terciária representa 2/10 de divsão secundária. Além da 5.ª divisão principal, as divisões secundárias são apenas divididas em duas partes correspondendo cada parte a 5/10 da divisão secundária correspondente.

As distâncias entre as divisões são proporcionais aos logaritmos dos números correspondentes a cada divisão. As escalas *A, B, C* e *D* começam e terminam pelo número 1. Essas divisões, 1, coincidem exatamente, quando a régua movel está na posição inicial; são as *bases direita* e *esquerda*, das escalas. As escalas *C* e *D* são utilizadas para a *multiplicação* e a *divisão*.

2) As escalas *A* e *B*, são idênticas. Dividem-se em duas partes iguais. As divisões principais nessas duas escalas são a repetição das divisões das escalas *C* e *D*; as distâncias entre as divisões são metade das respectivas distâncias nas escalas *C* e *D*.

Estas escalas são utililzadas, em combinanção com as escalas *C* e *D*, para a *extração de raízes quadradas* e no cálculo dos *quadrados dos números*. São também usadas para a multiplicação e a divisão.

3) A escala *C*1, ou escala *recíproca*, é calibrada como as escalas *C* e *D*, porém, em sentido contrário. De combinação com as escalas *C* e *D* serve para o cálculo do *recíproco de um número*.

4) A escala *K* contém 3 vezes as divisões principais das escalas *C* e *D*. Está, pois, dividida em 3 partes iguais. Combinada com as escalas *C* e *D*, dá os *cubos* e as *raízes cúbicas* dos números.

5) A escala *S*, no verso da régua móvel, tem divisões que correspondem aos ângulos de 20′ até 90°. Combinada com a escala *A*, dá os *senos* dos ângulos.

6) A escala *T* contém divisões que correspondem aos ângulos desde aproximadamente 6° até 45°.

Com a escala *D* fornece a relação das *tangentes* dos ângulos.

7) Enfim, a combinação da escala *L* com as escalas *D*, *S* e *T* dá os *logaritmos* dos números, dos senos e das tangentes.

302. — Leitura dos números nas escalas *A*, *B*, *C*, *D*, *K*, *Cl*. — E' de grande importância para os principiantes o aprenderem a *localizar* rápida e corretamente um dado número sobre estas escalas.

A régua "standard" de 10 polegadas, do tipo que estudamos, permite localizar números com *3 algarismos significativos*. Assim, se tivermos que localizar os números:

1,345 ; 0,7321 ; 12,15 ; 0,25 ; 17300,

procuraremos na régua os números com 3 algarismos:

134 732 121 250 173

a) **Leitura nas escalas *C* e *D*.**

Exemplo. I. — Localizar, nas escalas *C* ou *D*, o número 134.

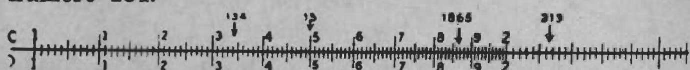

Fig. 195.

Coloca-se o retículo sobre a divisão 1, base esquerda da escala *C*. Faz-se deslizar o cursor até a divisão secundária 3 e, enfim, leva-se até a divisão terciária 4 ([1]) Veja-

(1) Em muitos casos é possível avaliar à vista a posição de um quarto algarismo. Assim, para o número 1 345, basta acrescentar meia divisão terciária a 134.

se *a posição* do número 134 na figura 195. Esta mesma posição se refere a todos os números nos quais os 3 primeiros algarismos significativos são 1, 3, 4.

EXEMPLO II. — Localizar o número 732 nas escalas *C* e *D*. Leva-se o retículo sobre a 3.ª divisão secundária entre 7 e 8. Avalia-se depois, *à vista,* a posição do 2 entre 730 e 735. Este último número esta localizado sobre a divisão terciária entre as divisões secundárias 3 e 4. Depois de algum treino, obtem-se uma bôa aproximação na localização dos algarismos que não figuram na escala. Veja-se, na figura 196, a posição de 732, 573 e 374 das escalas *C* e *D*.

FIG. 196.

b) **Leitura nas escalas *A* e *B*.** — Procede-se como nas escalas *C* e *D,* notando-se, porém, que a divisão 1 da base esquerda representa um *quadrado*: 1, 100, 1000. Um número de 1 até 10 esta situado na *metade esquerda* das escalas; um número de 10 até 100 está na *metade direita;* um número de 100 até 1000 está na metade esquerda; etc.

EXEMPLO. — Localizar o número **745** nas escalas *A* e *B*. O número está entre 100 e 1000; portanto, na metade esquerda das escalas.

FIG. 197.

Colocamos o cursor sobre a divisão principal 7; em seguida levámo-lo até a divisão secundária 4 e localizamos o retículo no meio do intervalo entre a 4.ª e a 5.ª divisões secundárias (Fig. 197). Veja-se, do mesmo modo, a localização dos números 225; 10,4; ($\pi = 3,14$).

c) **Leitura na escala K.** — Notemos que a base esquerda 1 representa sempre um *cubo*: 1, ou 1000. Os números entre 1 e 10 estão no *terço esquerdo* da escala; entre 10 e 100, no *terço médio;* entre 100 e 1000, no *terço direito;* entre 1 000 e 10 000, no terço esquerdo; etc.

EXEMPLO: — Localizar o número **327** na escala *K*. No terço esquerdo colocamos o retículo sobre a divisão principal 3; em seguida levamo-lo até a 2.ª divisão secundária e avaliamos, à vista, os 7 décimos (pouco mais da metade) do intervalo secundário seguinte, onde localizamos o retículo.

Exercícios. — Localizar os números que seguem: a) nas escalas *C* e *D;* b) nas escalas *A* e *B*.

1.	75	5.	11,5	9.	8,57
2.	7,5	6.	34,2	10.	0,125
3.	115	7.	203	11.	0,0145
4.	1,15	8.	608	12.	**20,1**

OPERAÇÕES

303. — Multiplicação. — Usaremos a escala *C* em combinação com a escala *D* (1). Para entendermos a razão do modo de proceder lembremo-nos que:

O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos factores.

EXEMPLO I — *Multiplicar* **3,2** *por* **2,6.**

(*a*) Levar a base da escala *C* sobre 32 na escala *D*. E' útil assinalar 32 com auxílio do retículo.

(*b*) Deslocar o cursor até que o retículo esteja sobre 26, na escala *C*.

(*c*) Ler, na escala *D*, o número que coincide, no retículo, com 26 da escala *C*.

A resposta é **8,32**.

(1) Também pode-se usar as escalas *A* e *B*.

Notemos que temos somado os logaritmos de 3,2 e 2,6; obtivemos o logaritmos de 8,32. A *posição da vírgula* é dada, neste caso, pela simples inspecção dos factores. Veremos, mais adiante, como pode ser deduzida.

Exemplo II. — *Multiplicar* **5,7** *por* **8,3.**

Façamos coincidir a base esquerda de *C* com 57 em *D*. Observemos que o número 83, na escala *C*, esta além do alcance da escala D. Eis, então, como se procede.

(*a*) Leva-se a base direita da escala *C* sobre 57 na escala *D*.

(*b*) Desloca-se o cursor até 83 na escala *C* e lê-se, em coincidência na escala, *D*, o produto **47,3.** A posição da vírgula é evidente.

Pràticamente fizemos a seguinte operação:

$$\log 5{,}7 + \log 8{,}3 - \log 10;$$

O resultado, na régua concide com:

$$\frac{5{,}7 \times 8{,}3}{10}.$$

De modo geral, cada vez que a *base direita* da escala *C* é usada, na multiplicação, em lugar da base esquerda, o resultado é dividido por 10, isto é: *a característica do logaritmo do produto é diminuida de 1 unidade.* Esta observação conduz à seguinte regra: *Regra para a localização da vírgula na multiplicação.*

Somar as características dos logaritmos dos factores e acrescentar a esta soma tantas unidades quantas vezes se usou a base direita de C. O resultado é a característica do produto.

No exemplo acima temos:

$$0 + 0 + (1) = \mathbf{1};$$

logo, o número tem 2 algarismos na parte inteira.

Multiplicações sucessivas. — Exemplo. — Seja calcular:

$$0{,}25 \times 3{,}1 \times 0{,}021$$

(*a*) Levamos a base esquerda de C sobre 25 em *D*.

(*b*) Levamos o cursor sobre 31, em *C*.

(*c*) Levamos a base *direita* de *C* debaixo do fio do retículo ,que deve ficar imóvel.

(*d*) Levamos agora o retículo para 21, em *C*, e lemos o resultado em coincidência na escala *D*: 1626, aproximadamente.

Usamos *uma vez* a base direita da régua *C*; logo, a característica do logaritmo do producto é;

$$\bar{1} + 0 + \bar{2} + (1) = \bar{2}$$

e o producto é: **0,01626.** O quarto algarismo significativo é avaliado *à vista*.

Exercícios. — Usando as escalas *C* e *D*, efetuar as multiplicações seguintes:

1.	3×2	**6**.	$5{,}7 \times 8{,}5$
2.	$2 \times 3{,}5$	**7**.	$0{,}53 \times 35{,}5$
3.	$4{,}5 \times 5{,}7$	**8**.	$0{,}0324 \times 0{,}732$
4.	$0{,}2 \times 5{,}7$	**9**.	$0{,}52 \times 0{,}049 \times 527$
5.	$15{,}1 \times 0{,}43$	**10**.	$700 \times 4{,}01 \times 0{,}00273$.

11. Calcular 15 por cento de 27; 25 por cento de 76; 2 ½ por cento de 735.

304. — Divisão. — Usaremos de preferência as escalas *C*. e *D*.

Exemplo I. — Dividir 57 por 1,7.

(*a*) Levamos 17 da escala *C*, sobre 57 da escala *D*. Este último número já pode estar assinalado com auxílio do retículo.

(*b*) Debaixo da base *esquerda* da escala *C* lemos na escala *D*, o quociente 33,5.

Efetuamos uma subtração de logaritmos:

$$\log 57 - \log 1{,}7$$

obtivemos o logaritmo de 33,5.

Exemplo II. — Dividir 3,4 por 5,1.

Assinalamos 5,1 na escala *D*, por meio do retículo.

(*a*) Levamos 3,4 da escala *C* sobre 5,1 já assinalado na escala *D*.

(*b*) Em coincidência com a base direita de *C* lemos o quociente na escala *D*: 666; neste caso 0,666. Na realidade efetuamos a seguinte operação com logaritmos.

$$\log 3{,}4 - \log 5{,}1 + \log 10;$$

isto corresponde à operação:

$$\frac{3{,}4 \times 10}{5{,}1}.$$

Obtemos assim o quociente *multiplicado* por 10. Esta observação conduz à seguinte *regra prática que permite obter a característica do logaritmo de um quociente*:

Subtrair a característica do divisor da característica do dividendo; deste resultado subtrair ainda 1 unidade se a base direita da régua C tiver sido usada.

No caso acima teremos:

$$0 - 0 - (1) = \bar{1}.$$

O quociente será, pois: 0,... seguido da parte significativa.

Muitas vezes uma simples inspecção dos números *indica a posição da vírgula na resposta. E' frequente também*, num dado problema, conhecer de antemão a resposta aproximada. Pràticamente essa regra é usada nos casos em que não é bem patente a posição da vírgula.

305. — Operação combinadas. — Seja calcular a expressão:

$$\frac{278 \times 1{,}25}{0{,}28 \times 0{,}078}$$

(*a*) Assinalamos 278 na escala *D* por meio do retículo e levamos até esse ponto a base esquerda de *C*.

(*b*) *Levamos* o retículo até 125 em *C*.

(*c*) Sem mover o cursor, levamos o número 28 da régua *C* sob o retículo.

(*d*) Deslocamos o retículo até a base esquerda de *C*.

(*e*) Levamos sob o retículo o número 73 da escala *C*.

(*f*) Lemos na base *direita* de *C* o quociente 17.

Notemos que a base direita de *C* foi usada apenas *uma vez na divisão;* logo acaracterística do quociente é:

$$(2+0)-(\bar{1}+\bar{2})-(1)=4.$$

Logo a resposta é **17 000.**

306. — Proporções. — A régua logarítmica pode ser utilizada como grandes vantagens para o cálculo de números que estejam entre si numa razão dada. Assim, façamos coincidir o número 4 de *C* com o número 8 de *D*. Todos os números que se correspondem nesta posição das escalas estão na razão de $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$. Tomemos por exemplo 2,3 na escala *C*; encontramos em coincidência 4,6 na escala *D* de tal modo que temos:

$$\frac{4}{8}=\frac{2{,}3}{4{,}6}$$

Eis a seguir. algumas aplicações no cálculo da 4.ª proporçional Mais adiante, faremos amplo uso desta propriedade na *resolução dos triângulos.*

Exemplo I. — Calcular x na proporção:

$$\frac{18{,}5}{4{,}5} = \frac{35}{x}.$$

Fazer coincidir 185 da escala C com 45 da escala D. Levamos depois o retículo sobre 35 na escala C e lemos na escala D o valor de x, **8,51**.

Exemplo II. — Calcular x em:

$$\frac{5{,}7}{x} = \frac{3{,}1}{82}$$

Tomemos aqui 3,1 em D que fazemos coincidir com 82 da escala C. O número 5,7 da escala D está fora do alcance da escala C. Basta nestes casos levar o retículo sob base direita da escala C e trazer em seguida a base esquerda de C debaixo do retículo. Leva-se em seguida o retículo sobre 5,7 da escala D e lê-se na escala C o valor $x =$ **151.**

Exemplo III. — Calcular x utilzando as escalas A e B.

$$\frac{0{,}25}{0{,}035} = \frac{74{,}2}{x}.$$

Multipliquemos os têrmos da primeira razão por 100, teremos:

$$\frac{25}{3{,}5} = \frac{74{,}2}{x}.$$

Colocamos o retículo sobre 25 (*metade direita*, de A) e trazemos 3,5 da escala B debaixo do retículo. Procuramos agora 74,2 na escala A e lemos em correspondência na escala B, $x =$ **10,4.**

307. — Recíprocos. — Dois números dizem-se ***recíprocos*** quando o seu producto é igual à unidade. Exemplos: o recíproco de é 1 é $\frac{1}{1} = 1$; o de 2 é $\frac{1}{2} = 0{,}5$; o de 25 e $\frac{1}{25} = 0{,}4$; o de **1,45** é ?...

Usa-se a escala $C1$. Fazem-se coincidir as bases das escalas $C1$ e D. Procura-se 145 na escala D e, por meio do retículo lê-se o recíproco em coincidência na escala $C1$: **69.** Logo o recíproco de 1,45 é $1 \div 1{,}45 =$ **0,69.**

308. — Quadrados. — Usam-se em combinação as escalas A e D. Desde que a escala D é o dobro da escala A, o quadrado de um número localizado na escala D estará em coincidência logo acima na escala A. Assim o quadrado de 2 (escala D) é 4 (escala A); o quadrado de 3 é 9; o quadrado de 5,1 é 26.

EXEMPLO. — Calcular o quadrado de **615.**

(*a*) Reduz-se o número dado a um número compreendido entre 1 e 10, deslocando-se a vírgula de n casas para a direita ou para a esquerda. Aqui deslocamos a vírgula de 2 casas para a esquerda.

(*b*) Acima de 615 (escala D) lê-se, com o retículo, 378 na escala A. Logo o quadrado de 6,15 é 37,8.

Desloca-se agora a vírgula de $2n$ casas em sentido contrário do que foi feito em (*a*), aqui 4 casas para a direita, e obtem-se **378 000** para o quadrado de **615.**

E' o resultado com 3 algarismos significativos exatos.

Pràticamente calculamos $(3{,}78 \times 100)^2$, isto é: $(3{,}78)^2 \times 10\,000$. Esta transformação tem por fim facilitar a determinação da posição da *vírgula* ou do número de algarismos da parte inteira.

309. — Raiz quadrada. — Todo número da escala A tem a sua raiz quadrada em correspondência na escala D.

Assim a raiz quadrada de 4 (escala A) é 2 escala D); de 16 (segunda metade da escala A) é 4 (escala D).

Exemplo I. — **Extrair a raiz quadrada de 0,635.**

Calcularemos a raiz de $\frac{63{,}5}{100}$ ou de $\frac{63{,}5}{10^2}$.

(a) Localizamos 63,5 na segunda metade da escala A.

(b) Com auxílio do retículo lemos 7,97 na escala D.

Esta é a raiz de 63,5. A raiz de $\frac{63{,}5}{10^2}$, ou 0,635, será igual a $\frac{7{,}97}{10}$, ou **0,797.**

Exemplo II. — Calcular $\sqrt{\frac{83{,}5 \times 0{,}27}{7{,}2 \times 0{,}025}}$.

Vamos mostrar com se procede ao fazer as operações do radicando por meio das escalas A e B.

Para facilitar a leitura nestas escalas, multipliquemos o numerador e o denominador por 100; a expressão dada vem a ser:

$$\sqrt{\frac{83{,}5 \times 27}{7{,}2 \times 2{,}5}}$$

(a) Colocamos o retículo sobre 27 na escala A (metade direita) e trazemos a base direita de B debaixo do retículo.

(b) Levamos o retículo sobre a divisão 83,5 de B (metade direita).

(*c*) Trazemos debaixo do retículo a divisão 7,2 de *B* (metade esquerda) e levamos o retículo sobre a base esquerda de *B*.

(*d*) Trazemos debaixo do retículo a divisão 2,5 de *B* (metade esquerda) e levamos o retículo sobre a base esquerda de *B*.

(*e*) Em coincidência com o retículo lemos, na escala *D*, a raiz quadrada **11,2**. A posição da da vírgula é deduzida ràpidamente do exame dos números.

Exercícios — Calcular o quadrado e a raiz quadrada dos números seguintes:

(*a*) 12,5	(*d*) 0,3
(*b*) 732	(*e*) 0,00255
(*c*) 4200	(*f*) $6\frac{4}{5}$.

310. — Cubo e raiz cúbica. — Todo número da escala *D* tem o seu *cubo* em correspondência na escala *K* e todo número da escala *K* tem a sua *raiz cúbica* em correspondência na escala *D*.

Exemplo. — Calcular $(35{,}1)^3$.

(*a*) Localizamos o retículo sobre 3,51 na escala *D*.

(*b*) Lemos o cubo 43 na escala *K*.

Logo o cubo de $(35{,}1)^3$ será aproximadamente **43000.**

Exemplo II. — Calcular $\sqrt[3]{0{,}00235}$.

Calcularemos a raiz cúbica de $\frac{2{,}35}{1000}$ ou $\frac{2{,}35}{10^3}$.

(*a*) Localizamos 2,35 no terço esquerdo da escala *K*, e lemos em concidência, na escala *D*, a raiz cúbica 1,33.

(*b*) A raiz cúbica de 10^3 é 10 e a expressão acima vem a ser $\frac{1{,}33}{10}$ ou **0,133.**

Exemplo III. — Calcular $\sqrt[3]{\frac{2\pi \times 0{,}17}{12}}$

(*a*) Efetuam-se as operações do radicando por meio meio das escalas *C* e *D*, tomando-se para π o valor 3,14.

A leitura se faz *uma vez* na base *direita* tanto no produto como na divisão. Não há portanto necessidade de modificar o resultado das características e temos:

$$(0 + 0 + 1) - 1 = 2.$$

O radicando é, pois: 0,089.

(*b*) Calcularemos a raiz cúbica de $\frac{89}{1000}$ ou $\frac{89}{10^3}$.

Obtemos, para 89, o número 4,46, utilizando o terço médio da escala K.

A raiz cúbica é, portanto: $\frac{4{,}46}{10}$ ou **0,446.**

Exercícios. — Calcular o cubo e a raiz cúbica dos números seguintes; verificar o resultado da raiz cúbica multiplicando 3 vezes o resultado por si mesmo por meio das escalas *C* e *D*.

(*a*) 64	(*d*) 0,743
(*b*) 9,5	(*e*) 0,000293
(*c*) 695	(*f*) 3,25/0,0025

311. — Senos. — Usaremos o verso da régua móvel disposta de modo que as letras *S L T* estejam do lado oposto às letras *A D K* e que as divisões iniciais coincidam exatamente com as bases das escalas *A* e *D*.

A escala *S* traz os arcos desde 40′ até 80° e a escala *A* dá os *senos* correspondentes a esses arcos. Entre 40′ e aproximadamente 5°45′ os senos devem ter um zero depois da vírgula; assim teremos:

sen 40′ = 0,0116; seen 1.° = 0,0174;
sen 2.° 14′ = 0,039; sen 5° 45′ = 0,1.

Entre 5°45′ e 80°, a parte significativa se escreve logo depois da vírgula e temos:

sen 6.° = 0,105; sen 15° 40′ = 0,270;
sen 40°30′ = 0,650; sen 72° = 0,95.

Além de 60°, os senos são dados com pouca aproximação.

312. — Tangentes. — A escala *T* dá os arcos desde 6° até 45° e a escala *D* traz as *tangentes* desses mesmos arcos. Assim temos:

tg 6° = 0,105 ; tg 15° 35′ = 0,297
tg 39°20′ = 0,820 ; tg 45° = 1.

Para um arco compreendido entre 45° e 90° procura-se a tangente do complemento desse arco obtido, por meio da escala *C*1.

Assim para 70° teremos:

(*a*) 90 — 70° = 20°;

Colocamos o retículo sobre 20°.

(*b*) Invertermos a régua móvel sem tocar no cursor e lemos na escala *C*1 o recíproco, 274.

Temos, pois: tg 70° = 2,74.

Notemos que os arcos compreendidos entre 45° e 63°30′ têm como tangente 1,... ; os arcos compreendidos entre 63°30′ e 71°35′ tem como tangente 2,... ; etc.

Para 83°40′, teriamos a tangente 9. E' fácil verificar estes resultados na escala recíproca C1.

Para arcos inferiores a 6^o, poderemos, sem erro notável, tomar os senos desses arcos em lugar das tangentes dos mesmos. Assim teremos *aproximadamente*:

$$\text{tg } 5^o = \text{sen } 5^o = 0{,}087$$
$$\text{tg } 2^o = \text{sen } 2^o = 0{,}035$$

Exercícios. — 1. Determinar os senos dos arcos seguintes:

(*a*) $32^o20'$ (*d*) $0^o48''$
(*b*) $4^o05'$ (*e*) $60^o30'$
(*c*) $1^o06'$ (*f*) $5^o40'$

2. Calcular o arco x sabendo que:

(*a*) $\text{sen } x = 0{,}252$; (*b*) $\text{sen } x = 0{,}086$; (**c**) $\text{sen } x = 0{,}755$.

3. Achar as tangentes dos arcos seguintes:

(*a*) $16^o20'$ (*d*) $3^o20'$
(*b*) $35^o55'$ (*e*) $50^o10'$
(*c*) $6^o45'$ (*f*) $70^o15'$

4. Achar: $\cos 20^o30'$ $\sec 25^o10'$; $\text{cotg } 18^o20'$.

5. Calcular x nas equações seguintes:

(*a*) $\text{sen } x = 0{,}275$ (*c*) $\text{tg } x = 3{,}45$.
(*b*) $\text{tg } x = 0{,}352$ (*d*) $\sec x = 2{,}25$.

313. — Logaritmos. — A escala L fornece a parte decimal do logaritmo de um número. A parte inteira, ou *característica*, é dada pelo número de algarismos da parte inteira do número considerado, ou nos números decimais, pela ordem do primeiro algarismo significativo da parte decimal.

O número é procurado na escala D e o seu logaritmo é achado em correspondência, por meio do retículo, na escala L. Assim teremos:

$\log 2 = 0{,}301$; $\log 798 = 2{,}902$

$\log 0{,}35 = \bar{1}{,}544$; $\log 0{,}000455 = \bar{4}{,}658$

Exercícios. — Calcular os logaritmos de:

(*a*) 27 (*d*) 0,595

(*b*) 795 (*e*) 0,00352

(*c*) 2,47 (*f*) sen 20° 30′

(*g*) Resolver a equação exponencial: $22 = (2{,}2)^x$.

314. — Recomendações para o uso da régua logarítmica.

(**a**) Nos exemplos dados já se deve ter notado a importância da ***leitura correta das escalas*** e do domínio perfeito das regras relativas às diversas operações.

(**b**) Não se deve, a princípio, procurar rapidez no cálculo; antes de tudo deve-se conseguir ***precisão na localização*** sobre as escalas das bases e do retículo.

(**c**) O ***retículo*** deve ficar bem ***perpendicular às escalas;*** deve-se controlar essa posição por meio das bases das escalas *A* e *D*. Esta observação é de particular importância quando se trata de obter, por meio do retículo, a coincidência entre escalas distantes — por exemplo na extração da raiz quadrada; no cálculo dos recíprocos; etc.

(**d**) Deve-se ter um especial cuidado em ***localizar a vírgula.*** Quando se usam apenas as escalas *C* e *D*, as regras dadas no número 303 são de fácil aplicação. Geralmente, porém, chega-se fàcilmente a uma apreciação correta da posição da vírgula, ***arredondando-se*** os números, num cálculo aproximado e verificando-se a ordem da grandeza obtida: se está compreendida entre 10 e 100, ou entre 0,01 e 0,001; etc.

(e) Enfim, procure-se, no começo, resolver problemas simples, fàcilmente verificáveis pelas operações aritméticas. Controlem-se os resultados e os graus de aproximação. Na resolução dos triângulos é útil a ***construção geométrica*** prévia das soluções como meio de verificação aproximada.

O conhecimento da régua logarítmica se tornará, deste modo, de grande utilidade nos anos de estudo e, mais tarde, representará importante auxílio na vida prática. Existem réguas de cálculo com outras escalas e cursores apropriados para fins especiais, para engenharia, indústrias diversas, eletrotécnica, etc. Quem souber lidar corretamente com a régua logarítmica escolar, fàcilmente adquirirá, mais tarde, a prática das réguas especiais.

315. — Resolução do triângulo retângulo por meio da régua logarítmica. Verificações. — Eis alguns exemplos que mostram como pode ser usada a régua logarítmica na resolução ***aproximada*** de triângulos retângulos. O uso da régua é sobretudo de grande utilidade na ***verificação*** dos resultados obtidos pelo cálculo. No caso do triângulo retângulo a "Lei dos senos" dá:

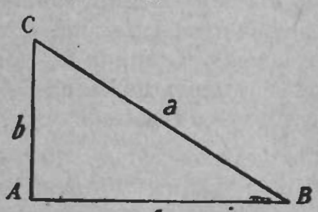

FIG. 198.

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

Utilizaremos o ***princípio das proporções*** (ver n.° 306).

Exemplo I. — Dados: $a = 870$; $B = 31°20'$; calcular: b, c e C.

Temos $C = 90° - B = 58°40'$. Logo, podemos escrever:

$$\frac{870}{1}=\frac{b}{\text{sen }31°20'}=\frac{c}{\text{sen }58°40'}.$$

(a) Fazemos coincidir a base direita de S com o número 870 da escala A (metade esquerda, ver n.º 306).

(b) Colocamos o retículo sobre 31°20′ (escala S) e lemos o valor de b em coincidência na escala A; $b = 452$.

(c) Colocamos o retículo sobre 58°40′ e lemos o valor de c em coincidência na escala A; $c = 742$.

Verificação.— Pode-se verificar o resultado pela fórmula $b=\sqrt{(a+c)(a-c)}$.

Temos aqui: $b=\sqrt{1\,612\times 128}$.

Utilizamos a escala A para o produto. Levamos o índice esquerdo de B debaixo do número 1 612 na metade esquerda de A. Em seguida levamos o retículo sobre 128 na metade direita de B. Enfim, lemos o resultado da raiz quadrada em coincidência com o retículo na escala D; temos $b = 4\,552$. Fica assim verificado o resultado.

Observação. — Poderíamos obter os valores de b e de c fazendo o produto de 870 pelos ***valores numéricos dos senos*** dados e utilizando as escalas C e D. Esse processo é mais vagaroso e menos cômodo do que o método das proporções.

Exemplo II. — Dados $a = 25$; $b = 7{,}2$. Calcular c, B e C.

Temos: $$\frac{25}{1}=\frac{7{,}2}{\text{sen }B}=\frac{c}{\text{sen }C}.$$

Colocamos a base esquerda de S em coincidência com o número 25 da metade direita de A. Colocamos o retículo sobre 7,2, na primeira metade de A e lemos em S o arco $B = 16°45'$.

Portanto, $C = 90° — 16°45' = 73°15'$.

Colocamos o retícnlo sobre 73°15' e lemos em A

$$c = 23{,}8.$$

Verificação. — Pela fórmula $c^2 = a^2 — b^2$, ou

$$(23{,}9)^2 = 25^2 — (7{,}2)^2$$

ou

$$573 = 625 — 52 = 573.$$

Exemplo III. — Dados $b = 19{,}5$; $c = 22{,}4$. Calcular a, B e C.

Temos: $$\operatorname{tg} B = \frac{b}{b} = \frac{19{,}5}{22{,}4}.$$

Escrevendo em forma de ***proporção*** temos:

$$\frac{\operatorname{tg} B}{19{,}5} = \frac{1}{22{,}4}.$$

Leva-se a base direita de T acima de22,4 em D. Põe-se o retículo sobre 19,5 em D e lê-se em T o arco B $=$ **41°3'**. Portanto: $C = 90° — 41°3' = \mathbf{48°57'}$.

Temos **agora**: $$\frac{a}{1} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{19{,}5}{\operatorname{sen} 41°3'}.$$

Coloca-se o retículo sobre 19,5 em A (metade direita). Leva-se o arco 41°3' de S em coincidência com o retículo e lê-se em A o valor que coincide com a base direita de B: $a = \mathbf{29{,}7}$.

Verificação. — Pela fórmula: $b = \sqrt{(a — c)(a + c)}$.

$$19{,}5 = \sqrt{7{,}3 \times 52{,}1}.$$

Leva-se a base direita de B sob a divisão 7,3 de A. Em seguida, coloca-se o retículo sobre 52,1 de B e lê-se a raiz quadrada em D: **19,5.**

Exercícios. — Resolver, por meio da régua os exercícios indicados no n.° 136, pág. 195.

316. — Resolução dos triângulos obliquângulos. —

CASO I. — ***Dados um lado e dois ângulos quaisquer.***

Dados: $a = 25{,}2$; $B = 35°20'$; $C = 22°10'$.

Calcular: A, b, c.

Temos: $A = 180—(B+C) = 122°30'$.

Pela "Lei dos senos" temos:

$$\frac{25{,}2}{\text{sen}\,57°30'} = \frac{b}{\text{sen}\,35°20'} = \frac{c}{\text{sen}\,22°10'}.$$

Coloquemos 57°30′ de S debaixo de 25,2 de A. Colocando o retículo sobre 35°20′ de S obtemos em A, $b =$ **17,25**; colocando-o, em seguida, sobre 22°10′ de S lemos em A, $c =$ **11,25.**

CASO II. — ***Dados dois lados e o ângulo oposto a um deles.***

Dados: $a = 94$, $b = 125$, $A = 12°20'$.

Calcular: c, B e C.

Temos: $$\frac{94}{\text{sen}\,12°20'} = \frac{125}{\text{sen}\,B}.$$

Colocamos o retículo sobre 94 em A (metade direita) e trazemos a esse ponto a divisão 12°20′ de S. Se procurarmos 125 em A (metade esquerda) vemos que está fora do alcance da escala S. Procede-se então como no n.º 306, Exemplo II. Trazemos o retículo sobre a base esquerda de S e, em seguida, conduzimos sob o retículo a base direita de S.

Procuramos agora 125 em A e lemos em S: $B =$ **14°25′**.

Este caso admite também a solução

$$B' = 180—14°25' = \mathbf{165°35'}.$$

Teremos, pois:

$$C = 180—(12°20' + 14°25') = \mathbf{153°15'}$$

e $C' = 180-(12°20'+165°35') = \mathbf{4°05'}$.

Donde:

$$\frac{94}{\text{sen } 12°20'} = \frac{c}{\text{sen}(180-153°15')} = \frac{c}{\text{sen } 26°45'}$$

e $$\frac{94}{\text{sen } 12°20'} = \frac{c'}{\text{sen } 4°05'}.$$

Resolvendo estas proporções obtemos:

$$c = \mathbf{218} \quad \text{e} \quad c' = \boldsymbol{34{,}5}.$$

A ***verificação*** pode ser feita de modo simples confrontando-se nas escalas A e S os números da seguinte série de razões.

$$\frac{94}{\text{sen } 12°20'} = \frac{125}{\text{sen } 14°25'} = \frac{218}{\text{sen } 26°45'} = \frac{34{,}5}{\text{sen}' 4°05}.$$

CASO III. — ***Dados dois lados e o ângulo compreendido.***

Dados $A = 26°20'$; $b = 49{,}5$; $c = 62{,}5$.

Calcular a, B, C'.

Pela fórmula 63 temos:

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}\,(C-B) = \frac{(c-b)\,\text{tg } \tfrac{1}{2}(C+B)}{(c+b)} = \frac{13 \text{ tg } 76°50'}{112} =$$

$$\frac{13}{112 \times \text{tg } 13°10'} = 26°22'$$

ou: $$C-B = 52°44'$$

donde: $C = \mathbf{102°52}$ e $B = \mathbf{50°28'}$.

Pela "Lei dos senos" temos agora:

$$\frac{a}{\text{sen } 26°20'} = \frac{49{,}5}{\text{sen } 50°28'}$$

donde: $a = \mathbf{28{,}5}$.

Verificar pela fórmula 64.

CASO IV. — ***Dados os 3 lados:***

$$a = 43; \quad b = 41{,}5; \quad c = 27{,}3.$$

Calcular A, B, C.

Temos, pela fórmula (**67**):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{14{,}4 \times 28{,}6}{55{,}9 \times 12{,}9}}.$$

Coloca-se o retículo sobre 14,4 em A e leva-se em coincidência com o retículo a base direita de B. Leva-se o retículo sobre 28,6 em B. Põe-se a divisão 55,9 de B sob o retículo e leva-se o retículo sobre a base direita de B. Põe-se a divisão 12,9 de B sob o retículo e leva-se o retículo sobre a base direita de B. Inverte-se a régua móvel e colocam-se as bases em correspondência. Sob o retículo lê-se, em T, o arco 37°06′; donde $A = 74°12'$.

De modo análogo obtém-se $B = 68°05'$ e $C = 37°45'$.

Verifica-se pela fórmula $A + B + C = 180°$; obtemos aqui:

$$74°12' + 68°04' + 37°45' = 180°01'.$$

Exercícios. — Resolver os exercícios propostos na página 218: n.os 148, 149, 150 e 151.

FORMULÁRIO

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
Resolução dos triângulos pelas razões trigonométricas.		
$\left.\begin{array}{l} b = a\cos C = a \operatorname{sen} B \\ c = a \cos B = a \operatorname{sen} C \end{array}\right\}$ . . .	1	28
$\left.\begin{array}{l} b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C \\ c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B \end{array}\right\}$ . . .	2	29
$a^2 = b^2 + c^2$	3	30
$\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$	4	37
$A + B + C$	5	37
$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}\right\}$ . .	6	38
$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc . \cos\ (180° - A)$ . . .	7	39
ARCOS		
Arcos de mesmo seno e co-secante ou terminados numa paralela ao eixo AA':		
$\left.\begin{array}{l} a = 2k\pi + \alpha \\ a = 2(k+1)\pi - \alpha \end{array}\right\}$	8	50
ou ainda $a = k\pi + (-1)^k\alpha$	9	51
Arcos da mesma tangente e co-tangente ou terminados nas extremidades de um mesmo diâmetro:		
$a = k\pi + \alpha$	10	52

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
Arcos de mesmo co-seno e secante ou terminados nas extremidades de uma paralela ao eixo BB′:		
$a = 2k\pi \pm \alpha$	11	53

O seno é positivo no 1.º e no 2.º quadrante.

A tangente é positiva no 1.º e no 4.º quadrante.

O co-seno é positivo no 1.º e no 4.º quadrante.

Arcos diferindo de um número completo de circunferências:

$\operatorname{sen}(2k + a) = \operatorname{sen} a$; $\cos(2k\pi + a) = \cos a$;
$\operatorname{tg}(2k\pi + a) = a$; $\operatorname{cotg}(2k\pi + a) = \operatorname{cotg}. a$.

Arcos suplementares:

$\operatorname{sen}(\pi - a) = \operatorname{sen} a$; $\cos(\pi - a) = -\cos a$;
$\operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a$; $\operatorname{cotg}(\pi - a) = -\operatorname{cotg} a$.

Arcos diferindo de uma semi-circumferência:

$\operatorname{sen}(\pi + a) = -\operatorname{sen} a$; $\cos(\pi + a) = -\cos a$;
$\operatorname{tg}(\pi + a) = \operatorname{tg} a$; $\operatorname{cotg}(\pi + a) = \operatorname{cotg} a$.

Arcos iguais e de sinais contrários:

$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$; $\cos(-a) = \cos a$;
$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$; $\operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a$

Arcos que diferem de $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\,(-a)=\cos a;$$

$$\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\,(-a)=-\operatorname{sen} a;$$

$$\operatorname{tg}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{cotg}\,(-a)=\operatorname{cotg} a;$$

$$\operatorname{cotg}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\,(-a)=\operatorname{tg} a$$

	NÚMERO	
	da fórmula	do texto
Fórmulas fundamentais:		
$\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1$	12	105
$\operatorname{tg} a=\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$	13	105
$\operatorname{cotg} a=\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$	14	105
$\operatorname{tg} a=\dfrac{1}{\operatorname{cotg} a}$	15	108
Em função de sen a:		
$\left.\begin{array}{l}\cos a=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}\\ \operatorname{tg} a=\dfrac{\operatorname{sen} a}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}\end{array}\right\}$	16	108
Em função de cos a:		
$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a}\\ \operatorname{tg} a=\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}\end{array}\right\}$ . . .	17	108

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
Em função de tg a:		
$\operatorname{sen} a = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	18	108
$\cos a = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	18	108
$\sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a$	19	105
$\operatorname{cosec}^2 a = 1 + \operatorname{cotg}^2 a$	20	105
Funções circulares de alguns arcos:		
$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}.\quad \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$		
$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$		
$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$		
$\operatorname{sen} 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4};\qquad \cos 18^\circ = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{4}}$	21	109
Funções circulares para a soma ou a diferença de dois arcos:		
$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ . . .	22	120
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ . . .	24	120
$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$ . . .	25	120
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ . . .	25	120
$\operatorname{tg}(45^\circ+b) = \dfrac{1+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} b}$	26	122

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$\text{tg}\,(45^\circ - b) = \dfrac{1 - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,b}$	27	122
$\text{tg}\,(45^\circ + b) = \dfrac{1 + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,b}$		
$\text{tg}\,(45^\circ - b) = \dfrac{1 - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,b}$		
Multiplicação dos arcos:		
$\text{sen}\,2a = \text{sen}\,a \cos a$	28	124
$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$	29	124
$\text{tg}\,2a = \dfrac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$	30	124
$\text{sen}\,2a = \pm 2\,\text{sen}\,a \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$	34	125
$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$	35	125
$\text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a \cos^2 a - \text{sen}^3 a$	31	124
$\cos {}^3 a = \cos^3 a - 3\,\text{sen}^2 a \cos a$	32	124
$\text{tg}\,3a = \dfrac{3\,\text{tg}\,a - \text{tg}\,3a}{1 - 3\,\text{tg}^2 a}$	33	124
$\text{sen}\,a = 2\,\text{sen}\dfrac{a}{2} \cos\dfrac{a}{2}$	36	126
$\cos a = \cos^2 \dfrac{a}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{a}{2}$	37	126
$\text{tg}\,a = \dfrac{2\,\text{tg}\dfrac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2\dfrac{a}{2}}$	38	126

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$\operatorname{sen} a = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$	39	127
$\cos a = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$	40	127
$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right)$ . .	41	130
$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \mp \sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right)$ . .	42	130
Divisão dos arcos:		
$2\cos^2\frac{a}{2} = 1+\cos a$	43	131
$2\operatorname{sen}\frac{a}{2} = 1-\cos a$	44	131
$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$	45	131
$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$	46	131
$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}}$	47	131

	NÚMERO de fórmula	NÚMERO de texto
$\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	48	131
Transformações logarítmicas:		
$\operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q=2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	49	143
$\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q=2\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$	50	145
$\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	51	143
$\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$	52	143
$2\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$	53	143
$2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$	54	143
$\operatorname{tg} a\pm\operatorname{tg} b=\dfrac{\operatorname{sen}(a\pm b)}{\cos a\cos b}$	55	144
$\operatorname{cotg} a\pm\operatorname{cotg} b=\dfrac{\operatorname{sen}(b\pm a)}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}$	56	144
$1\pm\operatorname{tg} a=\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(45^\circ\pm a)}{\cos a}$		147

NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto

Transformação logarítmica por meio de um ângulo auxiliar.

Tornar logarítmico: $x = a \pm b$.

Escreve-se $x = a\left(1 \pm \dfrac{b}{a}\right)$

e iguala-se este binómio a um dos seguintes:

$1 - \cos^2 \varphi$, $\quad 1 \pm \cos \varphi$

$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$. $\quad 1 \pm \operatorname{tg} \varphi$. 145

Idem para $\sqrt{a^2+b^2}$ ou $a\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$.

escreve-se: $\dfrac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \varphi$, donde $\sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{a}{\cos \varphi}$. 145

Idem para $\sqrt{a^2-b^2}$ ou $a\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$.

escreve-se: $\dfrac{b^2}{a^2} = \cos^2\varphi$, donde $\sqrt{a^2-b^2} = a \operatorname{sen}\varphi$ 146

Idem para $\dfrac{a-b}{a+b}$ ou $\dfrac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}$;

escreve-se: $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, donde $\dfrac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\,(45^\circ - \varphi)$ 146

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
Idem para a sen m±b *cos* m;		
escreve-se $a\left(\text{sen } m \pm \frac{b}{a} \cos m\right)$ e $\frac{b}{a} = \text{tg } \varphi$;		
donde: $a\left(\text{sen } m \pm \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi} \cos m\right) = \frac{a \,\text{sen}(x \pm \varphi)}{\cos \varphi}$		146
Caso de $a+b+c = 180°$.		
$\text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$ . .		146
$\text{sen a} - \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \text{ sen} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \text{sen} \frac{c}{2}$ . .		146
$\text{sen } a + \text{sen } b - \text{sen } c = 4 \text{ sen} \frac{a}{2} \text{sen} \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$ . .	.	146
$-\text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c = 4 \cos \frac{a}{2} \text{sen} \frac{b}{2} \text{sen} \frac{c}{2}$.		146
Resolução dos triângulos retângulos:		
$\left.\begin{array}{l} c = a \cos \text{B} \quad \text{e} \quad b = a \cos \text{C} \\ c = a \text{ sen C} \quad \text{e} \quad b = a \text{ sen B} \end{array}\right\}$	1(bis)	149
$c = b \text{ tg C}, \quad b = c \text{ tg B}$ e $a^2 = b^2 + c^2$.	57	149
$\text{S} = \frac{1}{4} a^2 \text{ sen 2B}$	58	150
$\text{tg} \frac{\text{C}}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$	59	150

Resolução de triângulos quaisquer:

$$A+B+C=180^\circ$$

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$\dfrac{a}{\text{sen A}}=\dfrac{b}{\text{sen B}}=\dfrac{c}{\text{sen C}}$	60	154
$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}$	61	155
$S=\dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\text{sen B sen C}}{\text{sen A}}$	62	157
$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}$	63	158
$c=(a+b)\dfrac{\text{sen}\ \tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}$	64	159
$S=\dfrac{1}{2}ab\ \text{sen C}$	65	161
$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{ac}}\\ \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}$	66	162

Fórmula	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)\ (p-b)}{p(p-a)}}$ $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p(p-b)}}$ $\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{bc}}$	67	162
$\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{ac}}$ $\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{ab}}$ $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p(p-cb}}$	68	162
$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$	69	163
$S=\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$	70	164
Elementos secundários do triângulo:		
$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R=\frac{abc}{2S}$	71	181
$4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2}$ $R=\frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$	72	181

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$r = (p-a)\ \mathrm{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\ \mathrm{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\ \mathrm{tg}\frac{C}{2}$	73	182
$r_a = p\ \mathrm{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\ \mathrm{cotg}\frac{B}{2} = (p-c)\ \mathrm{cotg}\frac{C}{2}$	74	182
$h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$	75	183
$h_a = \frac{a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$	76	183
(*Bissetriz int.*) $\alpha = \frac{2bc}{c-b} \cos \frac{A}{2}$	77	185
(*Bissetriz ext.*) $\alpha' = \frac{2bc}{c-b} \operatorname{sen} \frac{A}{2}$	78	186
Quadrilátero inscrito:		
$\mathrm{tg}\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-d)}{(p-b)\ (p-c)}}$	81	187
$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)\ (ac+bd)\ (ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$ . .	85	187
Triângulo esférico		
Área $S = \frac{E}{90} \times \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2 E}{180}$	86	228
Triângulo retângulo		
$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cos C$	87	231
$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$	92	,,
$\mathrm{tg}\ b = \mathrm{tg}\ a \cos C$	88	,,
$\mathrm{tg}\ c = \mathrm{tg}\ a \cos B$	93	,,

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \ \operatorname{tg} B$	94	231
$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \ \operatorname{tg} C$	89	"
$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$	95	"
$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B$	90	"
$\cos a = \cos c \cos b$	91	"
$\cos a = \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} B$	96	"
Triângulo obliquângulo		
$\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$	97	241
$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$ . .	98	242
$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(p-a)}\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}}$	99	244
$(A+B+C) - \pi = 2\,e$ (*excesso esférico*)		
$N = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} e}{\operatorname{sen}(A-e)\operatorname{sen}(B-e)\operatorname{sen}(C-e)}}$		
$\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = N \operatorname{sen}(A-e)$	100	245
Analogias de Delambre:		
$\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \cos\dfrac{C}{2}$ . . .		247
$\cos\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{C}{2}$ . . .		
$\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c} \cdot \cos\dfrac{C}{2}$ . . .		

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c} . \operatorname{sen} \frac{C}{2}$. . . .		
Analogia de Napier:		
$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} . \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$ . . .	101	248
$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)} . \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$ . . .	102	248
$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} . \operatorname{tg} \frac{c}{2}$ . . .	103	248
$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)} . \operatorname{tg} \frac{c}{2}$ . . .	104	248
Limites		
$\lim\limits_{a \to o} \frac{a}{\operatorname{sen} a} = 1$		268
$\lim\limits_{a = o} \frac{a}{\operatorname{tg} a} = \lim\limits_{a = o} \frac{\operatorname{tg} a}{a} = 1$		268
Formas indeterminadas:		
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$		269
Regra de L'Hôpital:		
$\lim . \frac{f(x)}{F(x)} = \lim . \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim . \frac{f''(x)}{F''(x)} \ldots$		269

	NÚMERO da fórmula	NÚMERO do texto
Derivadas:		
$\dfrac{d}{dx}(\text{sen } v) = \cos v.\dfrac{dv}{dx}$	270	
$\dfrac{d}{dx}(\cos v) = -\text{sen } v.\dfrac{dv}{dx}$		
$\dfrac{d}{dx}(\text{tg } v) = \sec^2 v.\dfrac{dv}{dx}$		
$\dfrac{d}{dx}(\text{cotg } v) = -\text{cosec}^2 v.\dfrac{dv}{dx}$		
$\dfrac{d}{d}(\sec v) = \sec v.\ \text{tg } v.\dfrac{dv}{dx}$		
$\dfrac{d}{dx}(\text{cosec } v) = -\text{cosec } v.\ \text{cotg } v.\dfrac{dv}{dx}$. . .		
Variações das funções:		
Máximo em x_0 se: $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = -$		273
Mínimo em x_0 se: $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = +$		
Inflexão em x_0 se: $f''(x_0) = 0$		
Inflexão horizontal se: $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$		
Relações entre as coordenadas retangulares (x e y) e as coordenadas polares (ρ e θ):		276
$x^2 + y^2 = \rho^2$; $y = \rho \text{ sen } \theta$		
$x^2 = \rho \cos \theta$; $\text{tg } \theta = \dfrac{y}{x}$		

Valores numéricos para facilitar os cálculos

EXPRESSÃO:	VALOR.	LOGARITMO	EXPRESSÃO:	VALOR.	LOGARITMO
$\sqrt{2}$ ...	1,4142	0,150 51	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	0,7937	$\bar{1}$,899 66
$\sqrt{3}$ ...	1,7322	0,238 56	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0,6934	$\bar{1}$,840 96
$\sqrt{5}$ ...	2,2362	0,349 49	$\frac{1}{\pi}$	0,3185	$\bar{1}$,502 85
$\sqrt{10}$ ..	3,1623	0,500 00	$\frac{1}{2\pi}$	0,1592	$\bar{1}$,201 82
$\sqrt[3]{2}$ ...	1,2599	0,100 32	$\frac{1}{3\pi}$	0,1061	$\bar{1}$,025 73
$\sqrt[3]{3}$ ...	1,4422	0,519 04	$\frac{1}{4\pi}$	0,0796	$\bar{2}$,901 80
π ...	3,1416	0,497 15	$\frac{1}{5\pi}$	0,0637	$\bar{2}$,803 88
2π ...	6,2832	0,798 18	$\frac{2}{\pi}$	0,6366	$\bar{1}$,804 88
3π ...	9,4248	0,974 27	$\frac{3}{\pi}$	0,9549	$\bar{1}$,979 97
4π ...	12,5664	1,099 21	$\frac{4}{\pi}$	1,2732	0,104 91
5π ...	15,7080	1,196 12	$\frac{180}{\pi}$	57,296	1,758 12
$\frac{\pi}{2}$	1,5708	0,196 12	$\frac{10800}{\pi}$	3437,7	3,536 27
$\frac{\pi}{3}$	1,0472	0,020 03	$\frac{3}{4\pi}$	0,2387	$\bar{1}$,377 91
$\frac{\pi}{4}$	0,7854	$\bar{1}$,895 09	$\frac{6}{\pi}$	1,9098	0,251 00
(arco de 1°) $\frac{\pi}{180}$	0,0175	$\bar{2}$,241 88	$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013	$\bar{1}$,005 70
(arco de 1') $\frac{\pi}{10800}$	0,0003	$\bar{4}$,463 73	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,5642	$\bar{1}$,751 43
$\frac{4}{3}\pi$ ...	4,1888	0,622 09	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,3989	$\bar{1}$,600 91
$\frac{1}{6}\pi$ ...	0,5236	$\bar{1}$,749 00	$\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$	0,3257	$\bar{1}$,512 86
π^2 ...	9,8696	0,994 30	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	0,2821	$\bar{1}$,450 39
$\sqrt{\pi}$ ...	1,7725	0,248 58	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ ou $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$	0,6828	$\bar{1}$,834 28
$\sqrt{2\pi}$ ...	2,5066	0,399 09			
$\sqrt{3\pi}$ ...	3,0693	0,487 04			
$\sqrt{4\pi}$ ...	3,5449	0,549 61			
$\sqrt[3]{\pi}$ ...	1,4646	0,165 72			
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\bar{1}$,849 49			
$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ...	0,5774	$\bar{1}$,761 44			
$\frac{1}{\sqrt{5}}$ ...	0,4472	$\bar{1}$,650 52			
$\frac{1}{\sqrt{10}}$ ...	0,3162	$\bar{1}$,500 00			

Valores naturais das funções circulares

Ângulos	Seno	Co-senos	Tangentes	Co-tangentes	Radianos	De 45° a 90°	
0°	0,0000	1,0000	0,0000	∞	0,0000	1,5708	90°
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	0,0175	1,5533	89
2	0,0349	0,9993	0,0349	28,6363	0,0349	1,5359	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	0,0523	1,5184	87
4	0,0697	0,9975	0.0[illegible]9	14,3007	0,0698	1,5010	86
5	0,0871	0,9962	0,0875	11,4301	0,0873	1,4835	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	0,1047	1,4661	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	0,1222	1,4486	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	0,1396	1,4312	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	0,1571	1,4137	81
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	0,1745	1,3963	80°
11	0,1908	0,9817	0,1943	5.1446	0,1920	1,3788	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	0,2094	1,3614	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	0,2269	1,3439	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	0,2443	1,3265	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	0,2618	1,3090	45
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	0,2793	1,2915	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	0,2967	1,2741	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	0,3142	1,2566	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	0,3316	1,2392	71
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	0,3491	1,2217	70°
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	0,3665	1,2043	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	0,3840	1,1868	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	0,4014	1,1694	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	0,4189	1,1519	66
25	0,4226	0,9063	0.4663	2,1445	0,4364	1,1345	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	0,4538	1,1170	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	0,4712	1,0996	63
28	0,4695	9,8829	0,5317	1,8807	0,4887	1,0821	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	0,5061	1,0647	61
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	0,5236	1,0472	60°
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	0,5411	1,0297	59
32	0.5299	0,8480	0,6249	1,6003	0,5585	1,0123	58
33	0.5446	0,8387	0.6494	1,5399	0,5760	0,9948	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	0,5934	0,9774	56
35	0,5736	0,8191	0,7002	1,4281	0,6109	0,9599	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	0,6283	0,9425	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	0,6458	0,9250	53
38	0,6157	0,7880	0.7813	1,2799	06.632	0,9076	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	0,6807	0,8091	51
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	0,6981	0,8727	50°
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	0,7156	0,8552	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	0,7330	0,8378	48
43	0.6820	0,7314	0,9325	1,0724	0,7505	0,8203	47
44	0.6947	0,7193	0,9657	1,0355	0.7679	0,8029	46
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	0,7854	0,7854	45°
	Co-senos	Senos	Co-tangentes	Tangentes	De 0° à 45°	Radianos	Ângulos

De 0° a 45°, tomar os títulos de cima

De 45° a 90°, tomar os títulos de baixo

ÍNDICE

PRIMEIRA PARTE

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

SEGUNDA PARTE

Funções trigonométricas de um ângulo qualquer

TERCEIRA PARTE

Trigonometria esférica

APÊNDICE

IMPRIMIU:
INDÚSTRIA GRÁFICA SIQUEIRA
SÃO PAULO

240

NA MESMA COLEÇÃO F. T. D.:

CÁLCULO

CADERNO DE ALGARÍSMOS.
PRIMEIRO LIVRO DE CÁLCULO, ilustrado.
EXERCÍCIOS DE CÁLCULO, *sem problemas.*
800 PROBLEMAS, sobre as 4 operações.
EXERCÍCIOS DE CÁLCULO, *com problemas.*
PARTE DO MESTRE, a mesma para os 3 livros precedentes.

ARITMÉTICA

ARITMÉTICA, CURSO PREPARATÓRIO, 4 operações, sistema métrico.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
ARITMÉTICA, CURSO ELEMENTAR, admissão ao 1.º ano ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
ARITMÉTICA, CURSO MÉDIO.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
Suplemento 2 parte do mestre dêste curso secundário de Aritmética.
ARITMÉTICA, CURSO SUPERIOR, para o curso colegial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
A MATEMÁTICA no CICLO GINASIAL — 1.ª série.
A MATEMÁTICA no CICLO GINASIAL — 2.ª série.
A MATEMÁTICA no CICLO GINASIAL — 3.ª série.
A MATEMÁTICA no CICLO GINASIAL — 4.ª série.

ÁLGEBRA

NOÇÕES DE ÁLGEBRA, *curso elementar*, para o curso ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
ÁLGEBRA, CURSO MÉDIO, para o curso ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
PONTOS DE ÁLGEBRA, antigo programa da 5.ª série ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
ÁLGEBRA, CURSO SUPERIOR, para o curso colegial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*

GEOMETRIA

GEOMETRIA, CURSO ELEMENTAR, para o curso ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
GEOMETRIA, CURSO MÉDIO, para o curso ginasial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
GEOMETRIA, CURSO SUPERIOR, para o curso colegial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*

TRIGONOMETRIA — LOGARITMOS

TRIGONOMETRIA PLANA E ESFÉRICA, para o curso colegial.
O mesmo livro, *parte do mestre.*
NOVAS TÁBUAS DE LOGARITMOS, com 7 decimais, de 1 até 10000 e das funções trigonométricas.

DESENHO

PERSPECTIVA DE OBSERVAÇÃO, curso teórico para mestres e alunos.
NOÇÕES DE PERSPECTIVA EXATA, para a licença colegial e os exames vestibulares.
DESENHO, para o curso Ginasial: coleção de 10 cadernos de modelos.
DESENHO, para o curso Primário: coleção de 6 cadernos de modelos.

PARA OUTROS LIVROS, PEDIR O CATÁLOGO